



En generel beregningsmetode til betontværsnit

Pedersen, Max Elgaard; Brøndum-Nielsen, Troels

Publication date:
1980

Document Version
Publisher's PDF, also known as Version of record

[Link back to DTU Orbit](#)

Citation (APA):
Pedersen, M. E., & Brøndum-Nielsen, T. (1980). *En generel beregningsmetode til betontværsnit*. Technical University of Denmark. BYG-Rapport No. R-115

General rights

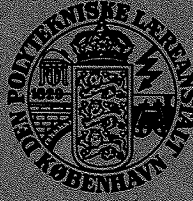
Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

BÆRENDE KONSTRUKTIONER

DANMARKS TEKNISKE HØJSKOLE



STRUCTURAL RESEARCH LABORATORY
TECHNICAL UNIVERSITY OF DENMARK

Max Elgaard Pedersen
EN GENEREL BEREGNINGSMETODE
FOR BETONTVÆRSNIT

RAPPORT NR. R 115 1980

EN GENEREL BEREGNINGSMETODE
FOR BETONTVÆRSNIT

Max Elgaard Pedersen

ABK 1979

FORORD

Denne rapport omhandler en generel beregningsmetode for betontværsnit og er udarbejdet som et led i betingelserne for erhvervelsen af den tekniske licentiatgrad.

Studiet er udført på Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks tekniske Højskole, med professor, dr.techn. Troels Brøndum-Nielsen som faglærer.

I forbindelse med udarbejdelsen af denne rapport vil jeg gerne takke min faglærer og en række af Afdelingens medarbejdere, specielt professor Bent Erik Pedersen, for værdifuld bistand.

Endvidere vil jeg gerne takke assistent Annette Bærentzen for hendes omhyggelige maskinskrivning af manuskriptet, teknisk assistent Ulla Madsen for hendes nydelige tegninger, samt Cowiconsult, Rådgivende Ingeniører AS, for velvillig assistance under færdiggørelsen af rapporten.

Nærum, marts 1979

Max Elgaard Pedersen

RESUMÉ

Denne rapport behandler dels de beregningstekniske forhold i forbindelse med betontværsnitsberegninger, dels disse beregningers materialemæssige aspekter og herunder specielt betonarbejdskurver for kombineret langtids- og korttidslast.

I kapitel 2 omtales grundprincipperne i den anvendte, numeriske beregningsmetode, som er en modificeret udgave af en velkendt metode, der baserer sig på opdeling af tværsnittet i trekanter.

I et efterfølgende kapitel beskrives de fysiske betingelser for armeringsstål, hvor det forspændte og ikke-forspændte stål kan behandles ved brug af principielt samme arbejdskurver men med ændrede værdier for materialeparametrene.

Kapitel 4 behandler de fysiske betingelser for beton, hvor disse deles op i korttids-, langtids-, samt kombinerede langtids-korttids spændingstøjningsrelationer. For de sidstnævnte relationer foreslås udtryk, hvor trykstyrken bliver en funktion af langtids-spændingsniveauet.

I kapitel 5 gennemgås en række eksempler til illustration af beregningsmetoden. Forskellige arbejdskurvers, samt kombinerede langtids-korttidsbelastningers indflydelse på beregningsresultaterne undersøges, og der drages sammenligninger mellem beregninger og forsøgsresultater for en bjælkeserie. Endelig foretages til illustration af et problem omfattende en mere kompliceret geometri en beregning af en brodrager med et betydeligt kabelantal.

INDHOLDSFORTEGNELSE

Resumé

Indholdsfortegnelse

Symbolliste

1.	Indledning	1
2.	Beregningsmetodens grundprincipper	2
2.1	Problemformulering	2
2.2	Den numeriske løsningsmetode	3
2.3	Standardiseret beregningsgang	8
2.4	Tværsnitskonstanter	13
3.	Fysiske betingelser for armeringsstål	16
3.1	Ikke-forspændt armeringsstål	16
3.2	Forspændingsstål	22
4.	Fysiske betingelser for beton	24
4.1	Fysiske betingelser ved korttidsbelastning	24
4.2	Fysiske betingelser ved langtidsbelastning	27
4.2.1	Beregningseksempel	32
4.3	Fysiske betingelser ved kombineret langtids- og korttidsbelastning	34
4.3.1	Spændingstøjningsrelationernes principielle opbygning	34
4.3.2	Spændingstøjningsrelationer for kombineret langtids- og korttidsbelastning	37
4.3.3	Beregningsmetodik for kombineret belastning	46
4.3.4	Beregningseksempel	48
5.	Beregningseksempler	50
5.1	Eksempel. Effekten ved brug af forskellige arbejdskurver	50
5.2	Eksempel. Virkningen af kombineret langtids- korttidsbelastning	53
5.3	Eksempel. Sammenligning med forsøg	56
5.4	Eksempel. Beregning af brodrager	60
6.	Konklusion	65

Litteraturfortegnelse	66
Appendix A	A1
Ligevægtsligningernes Jacobi-matrix	A1
Appendix B	B1
Jacobi-matricen, samt ligevægtsligningernes højreside opskrevet i NK-kordinatsystemet	B1
Appendix C	C1
Alternative løsningsmetoder til eksemplerne 4.2.1 og 4.3.4	C1
Appendix D	D1
Eksempel på EDB-udskrift af tværsnitsberegning	D1

SYMBOLLISTE

Notation	Definition	Figur	Udtryk	Side
A	Tværsnitsareal	2.2		3
\underline{A}	Arealvektor	2.24		9
A_c	Effektivt betonareal	2.5		3
A_{pj}	Areal af j'te forspændingskabel	2.5		3
A_{si}	Areal af i'te armeringsstang	2.5		3
E	Elasticitetsmodul	2.19		6
E_c	Betonens korttidselasticitetsmodul	4.1		24
E_{cL}	Betonens langtidselasticitetsmodul	4.8		29
$E_{c_{sek}}$	Betonens sekantelasticitetsmodul	2.30		14
E_{ct}	Betonens tangentelasticitetsmodul	2.28		14
E_p	Forspændingsstålets elasticitetsmodul			48
$E_{pj_{sek}}$	Sekantelasticitetsmodul for det j'te forspændingskabel	2.30		14
E_{pj_t}	Tangentelasticitetsmodul for det j'te forspændingskabel	2.28		14
E_s	Armeringsstålets elasticitetsmodul	3.2		17
E_{sek}	Sekantelasticitetsmodul	2.29		14
$E_{si_{sek}}$	Sekantelasticitetsmodul for den i'te armeringsstang	2.30		14
E_{si_t}	Tangentelasticitetsmodul for den i'te armeringsstang	2.28		14
E_{s2}	Tangenthældning, hjælpestørrelse	3.11		21
E_t	Tangentelasticitetsmodul	2.27		13
\underline{F}	$\underline{F} = (F_1, F_2, F_3)$	2.8		4
F_v	$F_v = \underline{F}$	2.12		5

Notation	Definition	Figur	Udtryk	Side
F_1, F_2, F_3	Funktionsudtryk		2.5, 2.6, 2.7	3, 4
I_x, I_y	Inertimomenter		2.27	13
\underline{J}_F	Den til \underline{F} hørende Jacobi-matrix		2.12	5
M_x, M_y	Bøjende momenter	2.1		2
N	Normalkraft	2.1		2
NK	Koordinatsystem orienteret efter nullinien	2.2		6, 7
S_x, S_y	Statiske momenter		2.27	13
XYZ	Retvinklet, kartesisk koordinat-system	2.1		2
$X'Y'$	Koordinataksler gennem det elastiske tyngdepunkt		2.31, 2.32	15
$X''Y''$	Hovedakser		2.33	15
Z_{xy}	Centrifugalmoment		2.27	13
f	Skalarfunktion		2.9	4
f_c	Betonens korttidsstrykstyrke		4.3	24
f_{cL}	Betonens langtidstrykstyrke		4.12	29
f_{ct}	Betonens trækstyrke		4.1	24
f_e	Stålproportionalitetsgrænse	3.4		19
f_y	Flydespænding	3.1		16
$f_{0.2}$	0.2-flydespænding	3.4		19
$f_{1.0}$	1.0-flydespænding	3.4		19
$\frac{h}{q}$	Tilvækst til \underline{u}_q på q' te iterationstrin		2.13	5
\underline{k}	Positiv normalvektor		2.24	9
n, k	Koordinater i NK -systemet		2.22	7
\underline{r}_ℓ	Stedvektor	2.4		9

Notation	Definition	Figur	Udtryk	Side
u	Skalar	2.9		4
\underline{u}	$\underline{u} = (\epsilon_z, \kappa_x, \kappa_y)$		2.8	4
u_q	Approx. til u på q 'te iterationstrin		2.10	4
\underline{u}_q	Approx. til \underline{u} på q 'te iterationstrin		2.11	5
u_r	$u_r = (u_1, u_2, u_3) = \underline{u}$		2.12	5
x, y	Koordinater i XY-systemet		2.1	2
x_i, y_i	Stedkoordinater for i 'te armeringsstang		2.6, 2.7	4
x_j, y_j	Stedkoordinater for j 'te forspændingskabel		2.6, 2.7	4
x_ℓ, y_ℓ	Stedkoordinater		2.24	9
δ	Toleranceparameter		2.15	5
ϵ	Tøjning		2.1	2
ϵ_c	Betontøjning		2.5	3
ϵ_{cr}	Krybetøjning		4.8	29
ϵ_{ct}	Betonens trækbrudtøjning		4.1, 4.2	24
ϵ_{cu}	Betonens trykbrudtøjning		4.3	24
ϵ_{dt_1}	Forsinket elastisk tøjning til tidspunktet t_1	4.3		28
ϵ_e	Elastisk tøjning	4.3		28
ϵ_e	Proportionalitetsgrænse		3.8, 4.3	20, 24
ϵ_{eL}	Elastisk langtidstøjning		4.50	44
ϵ_{KL}	Transformeret langtidstøjning		4.31, 4.37	40, 42

Notation	Definition	Figur	Udtryk	Side
ϵ_L	Langtidstøjning		4.9-4.11	29
$\epsilon_p(t, t_0)$	Basiskurve for plastisk krybetøjning	4.4		28
ϵ_{pj}	Tøjning i j'te forspændingskabel		2.5	3
ϵ_{pt_1}	Plastisk tøjning til tids- punktet t_1	4.3		28
ϵ_s	Ståltøjning		3.4-3.6	19
ϵ_{si}	Tøjning i i'te armeringsstang		2.5	3
ϵ_T	Totaltøjning			38
ϵ_{TT}	Hjælpetøjning		4.28, 4.32	39, 40
ϵ_y	Elasticitetsgrænse for ikke kolddeformeret stål	3.1		16
ϵ_z	Tøjning i origo	2.1	2.1	2
$\Delta\epsilon_z$	Tøjningstilvækst			
ϵ_{zL}	Langtidsværdi af ϵ_z		4.64	46
ϵ_o	Toppunktsværdi	4.2	4.5, 4.6	25, 26
ϵ_{oL}	Langtidsværdi af ϵ_o		4.17, 4.18	31
ϵ_{02}	Tøjning ved 0.2-flydegrænse		3.9, 3.10	21
ϵ_1	Abscisse til arbejdskurvens skæring med tøjningsaksen	4.2	4.6	25, 26
ϵ_{1L}	Langtidsværdi af ϵ_1		4.17, 4.18	31
θ	NK-systemets drejning i forhold til XY-systemet	2.2	2.23	7
θ_q	Approx. til θ på q'te iterationstrin			8
κ	Krumning		2.21	7

Notation	Definition	Figur	Udtryk	Side
κ_x, κ_y	Krumninger om X- og Y-akserne	2.1	2.1	2
$\Delta\kappa_x, \Delta\kappa_y$	Krumningstilvækster til κ_x og κ_y		2.19	6
κ_{xL}, κ_{yL}	Langtidsværdier af κ_x og κ_y		4.64	46
σ	Normalspænding		2.2	3
σ_c	Betonspænding		2.5	3
σ_{KL}	Transformeret langtidsspænding		4.34, 4.39	41,42
σ_L	Langtidsspænding		4.9-4.11	29
σ_{pj}	Spænding i j'te forspændingskabel		2.5	3
σ_s	Stålspænding		3.4-3.6	19
σ_{si}	Spænding i i'te armeringsstang		2.5	3
σ_T	Totalspænding			38
ϕ_1, ϕ_2	Specifik krybning		4.8, 4.14	29,30

1. INDLEDNING

Hensigten med denne rapport er primært at tilvejebringe det nødvendige grundlag for beregning af kipstabiliteten af betonbjælker med hensyntagen til betonens specielle materialeegenskaber, sekundært at udvikle en beregningsmodel, som gør det muligt at foretage lineære og ikke-lineære beregninger af komplicerede betontværsnit armerede med slap og/eller forspændt armering udsat for langtids-, korttids- eller kombineret langtids-korttidsbelastning.

Stabilitetsberegningen forudsætter kendskab til spændings- og tøjningstilstanden for den ligevægtstilstand, hvis stabilitet ønskes undersøgt. I rapporten er dels de beregningsmæssige forhold, dels de materialemæssige aspekter i forbindelse med en sådan tværsnitsanalyse behandlet.

2. BEREGNINGSMETODENS GRUNDPRINCIPPER

2.1 Problemformulering

I dette kapitel behandles principperne i en numerisk metode til beregning af normaltøjninger og normalspændinger under forudsætning af plan fordeling af tøjningerne over tværsnittet. Metoden, hvis grundprincipper er velkendte, giver mulighed for at benytte ikke-lineære arbejdskurver for beton, slap- og forspændt armering, ligesom revnedannelse og medregning af betontrækspændinger er mulig. Belastningen kan bestå af to bøjende momenter, M_x og M_y , beliggende i tværsnittets plan, samt en normalkraft N .

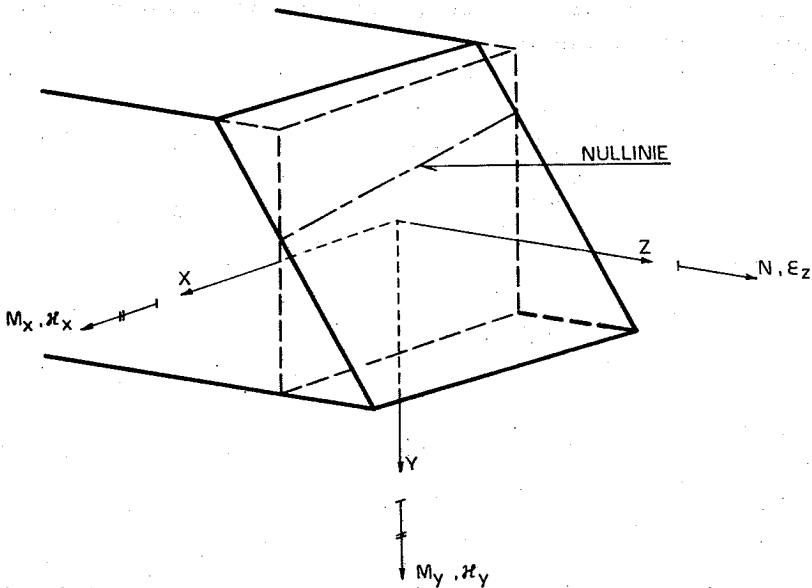


Fig. 2.1.

Under de nævnte forudsætninger består problemet derfor i at bestemme en tøjningsplan (se fig. 2.1)

$$\epsilon = \epsilon_z + \kappa_x y - \kappa_y x, \quad (2.1)$$

således at følgende 3 ligevægtsligninger er opfyldte:

$$N = \int_A \sigma(\epsilon) dA, \quad (2.2)$$

$$M_x = \int_A \sigma(\epsilon) y dA, \quad (2.3)$$

$$M_y = - \int_A \sigma(\epsilon) x dA \quad (2.4)$$

I (2.1) angiver κ_x og κ_y tøjningsplanens rotationer om henholdsvis x- og y-aksen, medens ϵ_z angiver tøjningen i det valgte koordinatsystems begyndelsespunkt. I (2.2)-(2.4) inkluderer fladeintegralerne både betonens og armeringens bidrag, og $\sigma(\epsilon)$ angiver normalspændingen som funktion af tøjningen. N angiver den normalkraft, som angriber i koordinatsystemets begyndelsespunkt, og en flytning af dette punkt betyder derfor en flytning af N's angrebepunkt. Statisk ækvivalens mellem systemerne før og efter flytningen må derfor tilvejebringes ved justering af momenterne M_x og M_y .

Idet normalspændingen $\sigma(\epsilon)$ i det generelle tilfælde er en ikke-lineær funktion af tøjningen ϵ , ses af (2.1)-(2.4), at problemet nu er formuleret som løsningen af et system af 3 ikke-lineære ligninger med de 3 ubekendte ϵ_z , κ_x og κ_y .

2.2 Den numeriske løsningsmetode

Ved at omforme og fuldt udskrive formlerne (2.2)-(2.4) fås med symboler forklaret i App.A:

$$F_1 = -N + \int_{A_c} \sigma_c(\epsilon_c) dA_c + \sum_i (A_{si} \sigma_{si}(\epsilon_{si})) + \sum_j (A_{pj} \sigma_{pj}(\epsilon_{pj})) = 0 \quad (2.5)$$

$$F_2 = -M_x + \int_{A_c} y \sigma_c(\epsilon_c) dA_c + \sum_i (y_i A_{si} \sigma_{si}(\epsilon_{si})) + \sum_j (y_j A_{pj} \sigma_{pj}(\epsilon_{pj})) = 0 \quad (2.6)$$

$$F_3 = -M_y - \int_{A_c} x \sigma_c(\epsilon_c) dA_c - \sum_i (x_i A_{si} \sigma_{si}(\epsilon_{si})) - \sum_j (x_j A_{pj} \sigma_{pj}(\epsilon_{pj})) = 0 \quad (2.7)$$

I formlerne (2.5)-(2.7) er armeringsbidragene trukket ud af integralerne og erstattet af summationer over de respektive antal af slappe (s) og forspændte (p) armeringsstål. Idet betegnelserne $\underline{F} = (F_1, F_2, F_3)$ og $\underline{u} = (\epsilon_z, \kappa_x, \kappa_y)$ benyttes, kan (2.5)-(2.7) og dermed (2.2)-(2.4) skrives:

$$\underline{F}(\underline{u}) = \underline{0} \quad (2.8)$$

Ligninger af den i (2.8) beskrevne type kan i almindelighed ikke løses eksplicit, og man må derfor anvende en iterativ løsningsmetode, se [Jacobi.72-2]. Til løsning af den til (2.8) svarende skalære ligning

$$f(u) = 0 \quad (2.9)$$

findes en række løsningsmetoder, f.eks. bisection, sekantmetoden og Newton-Raphson's metode. Af disse er den sidstnævnte metode mest velegnet til generalisation til det N-dimensionale rum af uafhængige variable, hvor der i det aktuelle tilfælde gælder $N = 3$.

Den skalære Newton-Raphson iterationsformel er givet ved

$$u_{q+1} = u_q - (f'(u_q))^{-1} f(u_q) \quad (2.10),$$

hvor q angiver iterationstrinnet, medens den generaliserede

Newton-Raphson iterationsformel er givet ved

$$\underline{u}_{q+1} = \underline{u}_q - (\underline{J}_F(\underline{u}_q))^{-1} \underline{F}(\underline{u}_q) , \quad (2.11)$$

hvor $\underline{J}_F(\underline{u})$ er den til \underline{F} hørende Jacobi-matrix:

$$\underline{J}_F(\underline{u}) = \frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{u}} \quad (v, r = 1, 2, 3) \quad (2.12)$$

En praktisk anvendelig udformning af den generaliserede Newton-Raphson formel er følgende:

$$\underline{u}_{q+1} = \underline{u}_q + \underline{h}_q , \quad (2.13)$$

hvor \underline{h}_q bestemmes, således at

$$\underline{J}_F(\underline{u}_q) \underline{h}_q = - \underline{F}(\underline{u}_q) \quad (2.14)$$

Man verificerer let, at (2.13) og (2.14) tilsammen svarer til (2.11).

Følgende konvergenzkriterium er velegnet i forbindelse med (2.13) og (2.14):

$$(|\underline{F}| \leq \delta) \wedge (|\underline{u}_{q+1} - \underline{u}_q| \leq \delta) , \quad (2.15)$$

hvor δ er en lille, positiv størrelse, som afhænger af den ønskede nøjagtighed.

Herefter anvendes iterationsopskriften (2.13)-(2.14) på det aktuelle problem. Første trin i denne proces er en bestemmelse af de enkelte størrelser, som indgår i disse formler. $\underline{F}(\underline{u})$ er givet ved formlerne (2.5)-(2.7), og af disse kan $\underline{J}_F(\underline{u})$ udledes ved anvendelse af (2.12) og (2.1), idet (2.1) giver

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial u_1} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon_z} = 1 \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial u_2} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \kappa_x} = y \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial u_3} = \frac{\partial \epsilon}{\partial \kappa_y} = -x \quad (2.18)$$

Elementerne i Jacobi-matricen $\underline{J}_F(u)$ er angivet i Appendix A.

Ved anvendelse af resultaterne i Appendix A kan (2.14) nu i princippet skrives

$$\begin{bmatrix} \int E \, dA & \int E y \, dA & - \int E x \, dA \\ \int E y \, dA & \int E y^2 \, dA & - \int E xy \, dA \\ - \int E x \, dA & - \int E xy \, dA & \int E x^2 \, dA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \epsilon_z \\ \Delta \kappa_x \\ \Delta \kappa_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \int \sigma \, dA + N \\ - \int y \, \sigma \, dA + M_x \\ \int x \, \sigma \, dA + M_y \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

I almindelighed afhænger elementerne i dette ligningssystem af ϵ_z , κ_x og κ_y , hvilket betyder, at ligningssystemet er ikke-lineært. Ses der bort fra ulineære effekter som krumme arbejdskurver og revnedannelse, er (2.19) et lineært ligningssystem, som kan løses explicit med $(\Delta \epsilon_z, \Delta \kappa_x, \Delta \kappa_y) = (\epsilon_z, \kappa_x, \kappa_y)$ og højreside (N, M_x, M_y) .

I de foregående beregninger er der benyttet et vilkårligt, fast XY-koordinatsystem. Dette betyder, at de i udtrykkene (2.5)-(2.7) og App. (A.2)-(A.7) optrædende størrelser, som er funktioner af ϵ , for faste værdier af ϵ_z , κ_x og κ_y ifølge (2.1) er funktioner af x og y . Ved drejning af koordinatsystemet, således at akserne er henholdsvis parallel med og vinkelret på nullinien, opnår man, at de nævnte størrelser kan udtrykkes som funktion af én parameter. Denne parameter er k -koordinaten i det på figur 2.2 viste NK-koordinatsystem. En af fordelene ved NK-systemet er, at samtlige fladeintegraler ved brug af dette system umiddelbart kan reduceres til sædvanlige integraler.

NK-koordinatsystemet orienteres på en sådan måde, at K -aksen peger i retning af stigende ϵ -værdier. Tøjningen kan da beskrives ved:

$$\epsilon = \epsilon_z + \kappa k, \quad (2.20)$$

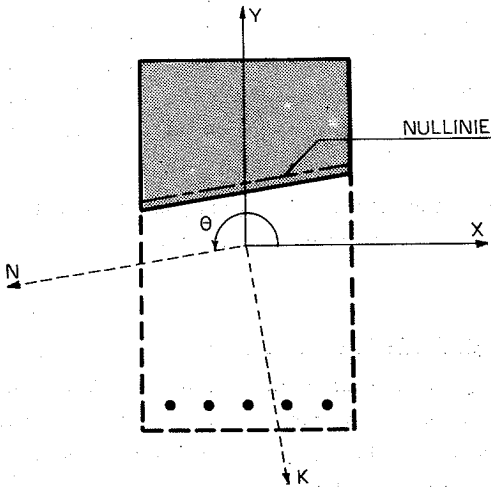


Fig. 2.2: XY-basiskoordinatsystemet og det belastningsafhængige NK-koordinatsystem.

hvor

$$\kappa = \sqrt{\kappa_x^2 + \kappa_y^2} \quad (2.21)$$

Transformationen fra XY-systemet til NK-systemet er givet ved:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

hvor

$$\cos\theta = \frac{\kappa_x}{\kappa}, \quad \sin\theta = \frac{\kappa_y}{\kappa} \quad (2.23)$$

Hvis κ er lig med 0, er ϵ konstant lig med ϵ_z over hele tværsnittet. Nulllinien eksisterer derfor ikke, og θ er vilkårlig. I dette tilfælde kan man f.eks. benytte θ lig med 0. Under beregninger er den korrekte placering af nulllinien og dermed den eksakte θ -værdi ikke kendt. Man må derfor på det $(q+1)$ 'te iterationstrin benytte den på q 'te trin beregnede θ_q -værdi.

I Appendix B er elementerne i ligningssystemet (2.19) opskrevet i det transformerende NK-koordinatsystem.

2.3 Standardiseret beregningsgang

Da det er hensigten at skabe mulighed for at betragte et vilkårligt tværsnit, må beregningen foregå på samme generelle, standardiserede måde. Til dette formål er den velkendte basisopdeling af tværsnittet i trekanter velegnet.

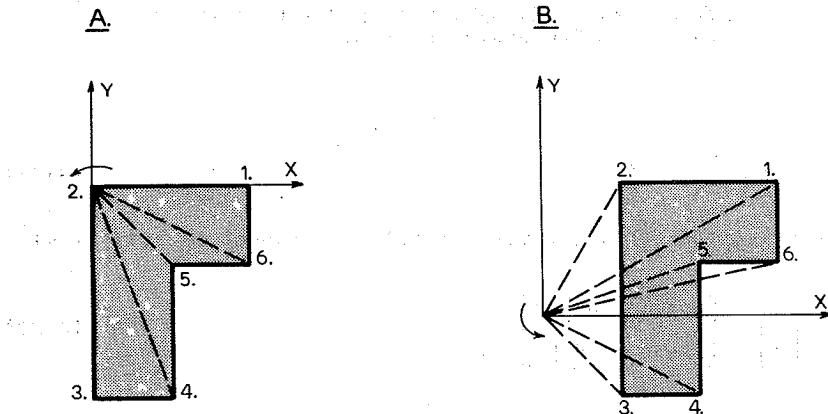


Fig. 2.3: To mulige trekantopdelinger.

På figur 2.3 ses 2 mulige trekantopdelinger af et givet tvær-
snit. De 2 opdelinger fører til samme resultat, men opdelingen
på figur 2.2.B er ikke hensigtsmæssig, da der her udføres en
del beregninger, som blot ophæver hinanden.

Bidragene fra en given trekant adderes eller subtraheres afhæn-
gig af, om arealvektoren \underline{A} har samme eller modsat retning af
tværsnittets positive normal \underline{k} . \underline{A} er givet ved følgende vek-
torprodukt:

$$\begin{aligned}\underline{A} &= \frac{1}{2} \underline{r}_l \times \underline{r}_{l+1} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x_l & y_l & 0 \\ x_{l+1} & y_{l+1} & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} (x_l y_{l+1} - x_{l+1} y_l) \underline{k} \quad (2.24)\end{aligned}$$

Ved benyttelse af et sædvanligt højrekoordinatsystem ses af
formel (2.24), at en omløbsretning fra \underline{r}_l til \underline{r}_{l+1} som vist
på figur 2.4 giver en positiv værdi af \underline{A} . l og $l+1$ refererer
til den fortløbende nummerering af tværsnittets hjørnepunkter.

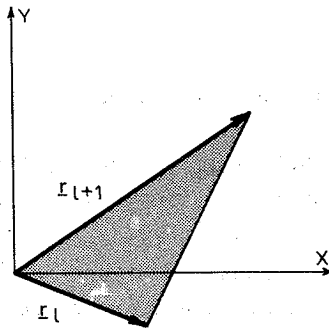


Fig. 2.4: Positivt areal udspændt af \underline{r}_l og \underline{r}_{l+1} .

Ifølge ovenstående bemærkninger er det derfor nødvendigt at foretage nummereringen på en sådan måde, at numrene optræder i stigende rækkefølge, når tværsnitskonturen gennemløbes med tværsnittet på venstre side. Se figur 2.5.

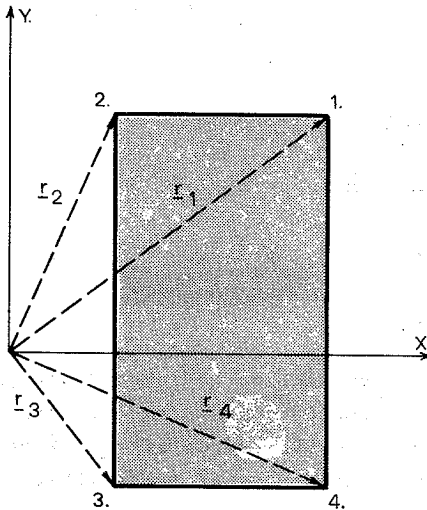


Fig. 2.5: Korrekt nummerering af tværsnitshjørner.

Tilsvarende behandles hule tværnit som vist på figur 2.6 ved at gennemløbe udsparringens kontur i modsat retning.

I beregningerne tages der hensyn til betonens ringe trækstyrke, som ofte kan sættes til enten 0 eller 10% af trykstyrken. En heraf følgende revnedannelse nødvendiggør derfor en ændret definition af tværsnittets geometri, idet der i beregningerne kun indgår bidrag fra armeringen og tværsnittets effektive del, som består af trykzonen, samt afhængig af den anvendte trækstyrke.

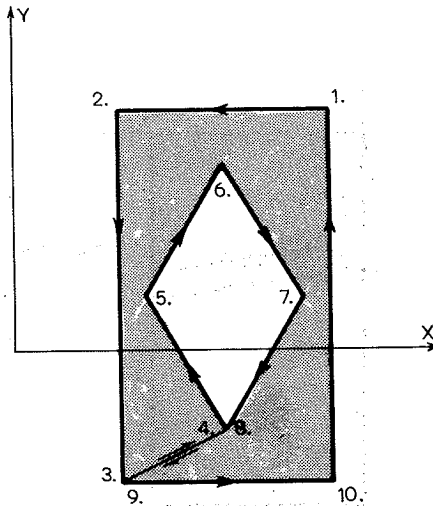


Fig. 2.6: Tværsnit med udsparring.

en vis del af trækzonen. På figur 2.7 er tværsnittets effektive del angivet med raster.

I det udviklede EDB-program foretages ændringen af tværsnitsgeometrien og renummereringen af tværsnittets hjørnepunkter automatisk på hvert trin i den i afsnit 2.2 omtalte iterationsproces. Endvidere overlejlres den omtalte trekantopdeling af det effektive tværsnit af en strimmelopdeling parallel med nullinien. Ved en passende lille strimmelbredde kan integralerne App.B (B5-13), som udgør elementerne i ligningssystemet 2.19, integreres numerisk med stor nøjagtighed. Strimmelopdelingen foretages på en sådan måde, at man får tilnærmelsesvis samme beregningsnøjagtighed for alle trekanter i et givet tværsnit.

De numeriske integrationer udføres ved brug af den sammensatte Simpson'ske formel, se [Davis. 75-11], idet denne er simpel at anvende, samtidig med at den er meget nøjagtig med relativt få intervalopdelinger.

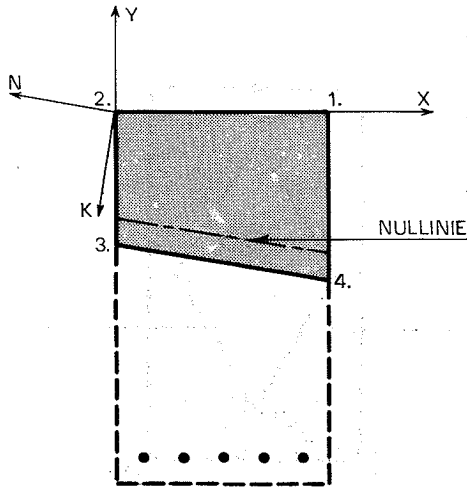


Fig. 2.7: Revnet betontværsnit med renummerering af tværsnitshjørnerne.

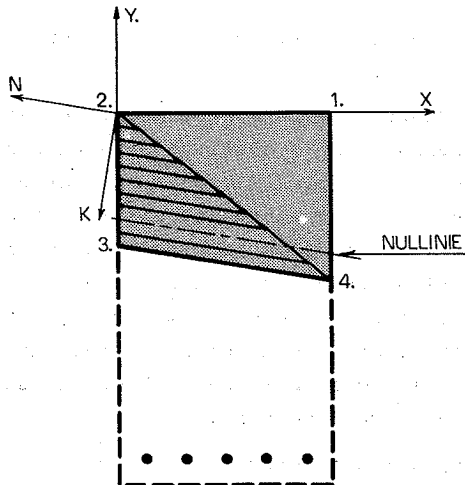


Fig. 2.8: Strimmelopdeling af trekant (2.)(3.)(4.).

(2.25) angiver den sammensatte Simpson'ske integrationsformel med $2n$ intervaller:

$$\int_a^b f(t) dt = \frac{h}{6} [f(a) + f(b) + 4 \sum_{s=1}^n f(a + \frac{h}{2}(2s-1)) + 2 \sum_{s=1}^{n-1} f(a + sh)] + h^4 \frac{b-a}{2880} f^{(4)}(\xi), \quad (2.25)$$

hvor h angiver den dobbelte strimmelbredde.

Af restleddet

$$h^4 \frac{b-a}{2880} f^{(4)}(\xi) \quad (2.26)$$

ses, at (2.25) tilnærmer polynomier op til 3. grad eksakt uanset den benyttede strimmelbredde. For mere komplicerede $f(t)$ -funktioner aftager fejlen med h^4 , hvilket betyder, at en halvering af h giver en formindskelse af fejlen med en faktor 16.

2.4 Tværskitskonstanter

Foruden de søgte tøjningsparametre ϵ_z , κ_x og κ_y , som fastlægger tøjningsplanen (2.1), får man ved den anvendte metode beregnet et givet tværskits tangentstivheder, idet Jacobi-matricen i (2.19) er identisk med følgende tværskitsstørrelser vægtet med tangentmodulen:

$$\frac{\partial F}{\partial u_r} = \begin{bmatrix} E_t A & E_t S_x & -E_t S_y \\ E_t S_x & E_t I_x & -E_t Z_{xy} \\ -E_t S_y & -E_t Z_{xy} & E_t I_y \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Disse tværskitskonstanter kan almindeligvis ikke skilles i en ren geometrisk og en ren fysisk størrelse, idet tangentmodulen ved anvendelse af ikke-lineære arbejdskurver er belastningsafhængig. Eksempelvis har $E_t A$ følgende udseende:

$$E_t A = \int_{A_c} E_c(\epsilon_c)_t dA_c + \sum_i (E_{si}(\epsilon_{si})_t A_{si}) + \sum_j (E_{pj}(\epsilon_{pj})_t A_{pj}) \quad (2.28)$$

Hvis man i stedet for tilvæksterne $\frac{\partial F_v}{\partial u_r}$ betragter forholdet F_v/u_r får man tilsvarende tværsnittets sekantstivheder

$$\frac{F_v}{u_r} = \begin{bmatrix} E_{sek} A & E_{sek} S_x & -E_{sek} S_y \\ E_{sek} S_x & E_{sek} I_x & -E_{sek} Z_{xy} \\ -E_{sek} S_y & -E_{sek} Z_{xy} & E_{sek} I_y \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

For (2.29) gælder de samme bemærkninger som for (2.27), og man får tilsvarende

$$E_{sek} A = \int_{A_c} E_c(\epsilon_c)_{sek} dA_c + \sum_i (E_{si}(\epsilon_{si})_{sek} A_{si}) + \sum_j (E_{pj}(\epsilon_{pj})_{sek} A_{pj}) \quad (2.30)$$

De fuldt udskrevne udtryk for størrelserne i (2.27) er angivet i Appendix A. De samme udtryk kan benyttes for (2.29), hvis man erstatter $\partial F_v/\partial u_r$ med F_v/u_r og tangentmodulerne $E_c(\epsilon_c)_t$, $E_{si}(\epsilon_{si})_t$ og $E_{pj}(\epsilon_{pj})_t$ med sekantmodulerne $E_c(\epsilon_c)_{sek}$, $E_{si}(\epsilon_{si})_{sek}$ og $E_{pj}(\epsilon_{pj})_{sek}$.

(2.29) giver en sammenhæng mellem tværsnittets snitkræfter og tøjningstilstand, hvorimod (2.27) giver en sammenhæng mellem disse størrelses tilvækster ud fra en betragtet tilstand. Man skal derfor benytte sekantbjælkestivhederne (2.29) i bjælkens ligevægtsligninger, medens tangentbjælkestivhederne skal benyttes i stabilitetsligningerne.

Ved brug af (2.29) er det muligt at bestemme tværsnittets elasti-

ske tyngdepunkt og hovedakser. Man kan bestemme den akse X' parallel med X -aksen, om hvilken det vægtede statiske moment er 0:

$$E_{\text{sek}} S_{x'} = 0 \quad (2.31)$$

Tilsvarende eksisterer der en akse Y' parallel med Y , om hvilken

$$E_{\text{sek}} S_{y'} = 0 \quad (2.32)$$

Skæringspunktet mellem X' og Y' angiver det elastiske tyngdepunkts placering.

Hovedakserne X'' , Y'' kan herefter bestemmes som det sæt akser gennem tyngdepunktet, der opfylder betingelsen:

$$E_{\text{sek}} Z_{x''y''} = 0, \quad (2.33)$$

hvor $E_{\text{sek}} Z_{x''y''}$ er det vægtede centrifugalmoment med hensyn til akserne $X''Y''$. Benyttes disse akser som koordinatakser, kan (2.29) skrives som en diagonalmatrix. Det må understreges, at det generelt ikke er muligt på forhånd at foretage et sådant valg af koordinatakser, idet man af (2.31)-(2.33) kan se, at det elastiske tyngdepunkts placering og hovedaksernes orientering afhænger af belastningen, og derfor vil variere med denne.

I det udviklede EDB-program beregnes tyngdepunktets placering, samt elementerne i (2.27) og (2.29) for et sæt akser gennem tyngdepunktet parallelle med de oprindelige X og Y akser.

3. FYSISKE BETINGELSER FOR ARMERINGSSTÅL

Spørgsmålet om materialernes fysiske betingelser eller spændings-tøjningsrelationer blev ikke berørt i kapitel 2, idet fremstillingen der koncentreredes om beregningsmetodens principielle forhold. I dette og det efterfølgende kapitel er formålet derimod at give en behandling af de væsentligste spændingstøjningsrelationer for armering og beton, og herunder de i det udviklede EDB-program anvendte relationer.

3.1 Ikke-forspændt armeringsstål

Armeringsstænger opdeles normalt i to hovedtyper : de ikke kolddeformerede og de kolddeformerede stænger. De ikke kolddeformerede stænger har en klart defineret flydespænding f_y , og arbejdskurven kan derfor med god tilnærmelse antages at være

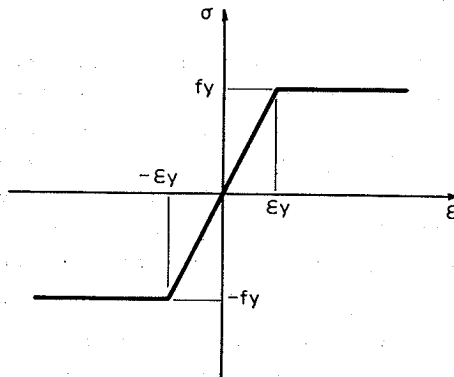


Fig. 3.1: Arbejdskurve for ikke kolddeformerede armeringsstænger.

lineærelastisk-idealplastisk, se figur 3.1. I virkeligheden vil man på grund af tøjningshærdningen for spændinger større end cirka 3% få en yderligere stigning af spændingen indtil et maximumsniveau. Fra dette maximumsniveau og til brud vil man måle faldende stål-

kræfter på grund af armeringsstangens indsnøring i brudzonen, medens man ved beregning af stålspændingen i forhold til det indsnørede stålareal ikke vil observere noget spændingsfald.

Spændings-tøjningsrelationen for ikke kolddeformede armeringsstænger (se figur 3.1) :

$$\sigma = -f_y \quad \text{for} \quad \epsilon \leq -\epsilon_y \quad (3.1)$$

$$\sigma = E_s \epsilon \quad \text{for} \quad -\epsilon_y < \epsilon < \epsilon_y \quad (3.2)$$

$$\sigma = f_y \quad \text{for} \quad \epsilon \geq \epsilon_y \quad (3.3)$$

E_s er stålets elasticitetskoefficient, og $\epsilon_y = f_y/E_s$ er den tøjning, som netop giver flydning i stålet.

(3.1)-(3.3) gælder kun for aflastning og genbelastning, såfremt flydespændingen ikke er nået. Er dette derimod tilfældet foregår aflastning på grund af de plastiske tøjningers irreversible karakter langs en ret linie CD parallel med den oprindelige elastiske del af arbejdskurven. Se figur 3.2.

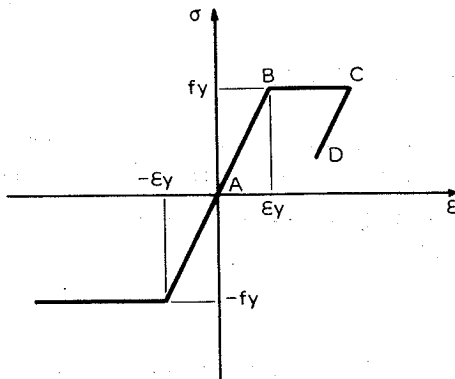


Fig. 3.2: Aflastning i det plastiske område.

Hvis armeringsstålet underkastes store træktøjninger, vil man få en tøjningshærdning af stålet, som giver større trækbrudstyrke og mindre brudtøjning ved efterfølgende belastning. Det betyder, at man får et stærkere, men sprødere materiale. Tøjningshærdningen kan også give anledning til den såkaldte Bauschinger-effekt, hvilket vil sige en permanent reduktion af stålets proportionalitetsgrænse og 0.2-flydespænding ved trykpåvirkning, se figur 3.3.

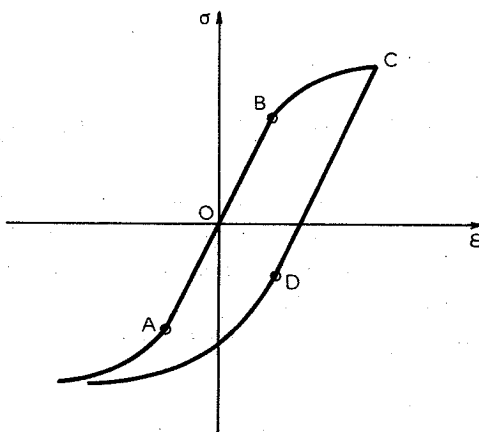


Fig. 3.3: Bauschinger-effekt.

Ved meget store tryktøjninger nærmer kurven CD, som antydtes på figur 3.3, sig til den oprindelige trykarbejdskurve.

I praksis benyttes tøjningshærdningen til at øge flydespændingen af det valsede stål.

Armeringsstænger fremstillet på denne måde betegnes kolddeformeret stål og har i modsætning til det ikke kolddeformerede stål ikke nogen veldefineret overgang mellem det elastiske og plastiske spændingsområde, se figur 3.4. Ofte defineres arbejdskurven ved hjælp af spændingerne svarende til henholdsvis proportionalitetsgrænsen, 0.2% og 1.0% plastiske tøjninger.

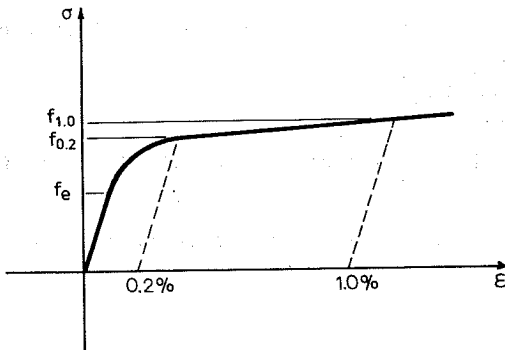


Fig. 3.4: Trækarbejdskurve for kolddeformeret stål.

Blandt de foreslåede spændingstøjningsrelationer, som idealiserer opførslen af kolddeformeret stål, har interessen især koncentreret sig om to formler angivet af henholdsvis Ramberg-Osgood [Ramberg.43-1] og Nadai [Nadai.50-1]. Ramberg-Osgood formelen er givet ved følgende udtryk :

$$\epsilon_s = \frac{\sigma_s}{E_s} + k \cdot (\sigma_s)^n \text{ for } \epsilon_s > 0, \quad (3.4)$$

hvor k er en konstant. E_s, k og n kan for et givet stål fastlægges ved forsøg. Nadai-formlen kan betragtes som en videreudvikling af (3.4), idet den over proportionalitetsgrænsen kvalitativt antager samme form som (3.4), medens den under denne grænse er lineær.

Nadai-formlen :

$$\epsilon_s = \frac{\sigma_s}{E_s} \text{ for } 0 < \epsilon_s < \frac{f_e}{E_s} \quad (3.5)$$

$$\epsilon_s = \frac{\sigma_s}{E_s} + 2 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{\sigma_s - f_e}{f_{0.2} - f_e} \right)^n \text{ for } \epsilon_s > \frac{f_e}{E_s} \quad (3.6)$$

hvor f_e er spændingen ved proportionalitetsgrænsen, og $f_{0.2}$ er spændingen svarende til 0.2% blivende plastisk tøjning. Man

ser af (3.6), at de plastiske tøjninger er givet ved :

$$2 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{\sigma_s - f_e}{f_{0.2} - f_e} \right)^n, \quad (3.7)$$

hvor n ifølge [CEB.63-1] kan sættes til 5 og $f_e/f_{0.2}$ til 0.716.

Ramberg-Osgood og Nadai relationerne er illustreret på figur 3.5.

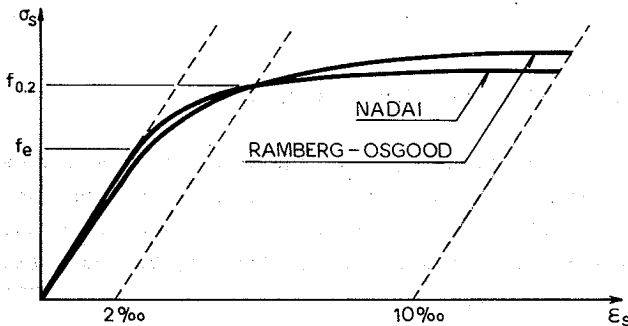


Fig. 3.5: Ramberg-Osgood og Nadai spændings-tøjningsrelationer.

I udtrykkene (3.4) og (3.5)-(3.6) er tøjningen angivet som funktion af spændingen, men ofte viser det sig mere hensigtsmæssigt at benytte tøjningen som uafhængig variabel. Sådanne formler kan ikke generelt udledes af (3.4) og (3.6), idet disse ikke kan inverteres for en vilkårlig værdi af eksponenten n . I stedet for disse formler foreslås følgende formel, som også giver en udmærket tilnærmelse i det elastisk-plastiske overgangsområde. Se figur 3.6.

$$\sigma_s = E_s \epsilon_s \quad 0 \leq \epsilon_s \leq \epsilon_e, \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \sigma_s = & ((E_s + E_{s2})(\epsilon_{02} - \epsilon_e) - 2(f_{02} - f_e)) \left(\frac{\epsilon_s - \epsilon_e}{\epsilon_{02} - \epsilon_e} \right)^3 \\ & + (3(f_{02} - f_e) - (2E_s + E_{s2})(\epsilon_{02} - \epsilon_e)) \left(\frac{\epsilon_s - \epsilon_e}{\epsilon_{02} - \epsilon_e} \right)^2 \\ & + E_s \cdot (\epsilon_s - \epsilon_e) + f_e \end{aligned} \quad \text{for } \epsilon_e \leq \epsilon_s \leq \epsilon_{02} \quad (3.9)$$

$$\sigma_s = f_{0.2} + E_{s2} \cdot (\epsilon_s - \epsilon_{02}) \quad \text{for } \epsilon_s \geq \epsilon_{02} , \quad (3.10)$$

hvor ϵ_e og ϵ_{02} er tøjningerne ved henholdsvis proportionalitetsgrænsen og 0.2% blivende tøjning.

E_{s2} er defineret på følgende måde :

$$\begin{aligned} E_{s2} &= \frac{f_{1.0} - f_{0.2}}{\epsilon_{10} - \epsilon_{02}} \\ &= \frac{f_{1.0} - f_{0.2}}{\frac{1}{E_s}(f_{1.0} - f_{0.2}) + 8.0 \cdot 10^{-3}} \end{aligned} \quad (3.11)$$

hvilket svarer til hældningen af den rette linie i område III på figur 3.6.

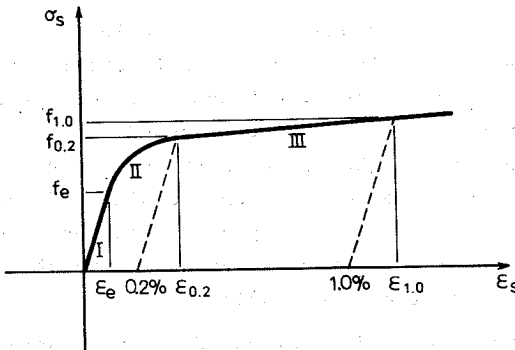


Fig. 3.6: Trækarbejdskurve for kolddeformeret stål.

Det verificeres let, at 3. grads polynomiet (3.9) opfylder de nødvendige randbetingelser :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s &= f_e \\ \frac{d\sigma_s}{d\epsilon_s} &= E_s \end{aligned} \right\} \text{ for } \epsilon_s = \epsilon_e \quad (3.12)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s &= f_{0.2} \\ \frac{d\sigma_s}{d\epsilon_s} &= E_{s2} \end{aligned} \right\} \text{ for } \epsilon_s = \epsilon_{02} \quad (3.13)$$

I det udviklede EDB-program er relationerne (3.1)-(3.3) og (3.8)-(3.10) indbyggede, således at der er mulighed for at anvende spændingstøjningsrelationer af følgende 3 typer: lineær-elastisk, lineærelastisk-idealplastisk og elastisk-plastisk. Den lineærelastiske relation fremkommer ved at sætte flydespændingen f_y i (3.1) og (3.3) lig med et stort tal. Ved den elastisk-plastiske relation benyttes en trykarbejdskurve svarende til trækarbejdskurven, idet der ses bort fra en eventuel Bauschinger-effekt.

3.2 Forspændingsstål

Spændarmering i form af kabler, stænger eller strands findes i en lang række forskellige typer, hvis forskelle hovedsagelig skyldes fabrikationsmetoderne. Det mest anvendte stål fremstilles ved koldtrækning efterfulgt af en spændingsaflastning ved et par hundrede grader i nogle timer. Dette stål har ved 20°C en relaksation på cirka 4 procent efter 120 timer. En nedsættelse af denne relaksation til under 1 procent kan opnås ved opvarmning af stålet under trækpåvirkning, hvorved man får et såkaldt stabiliseret stål (lavrelaksationsstål).

Trækarbejdskurven for kolddeformeret forspændingsstål svarer til de tilsvarende arbejdskurver for tøjningshærdet armeringsstål.

og relationerne i afsnit 3.1 kan derfor benyttes med ændrede værdier af materialparametrene. I EDB-programmet er der - ligesom for det ikke-forspændte stål - mulighed for at anvende lineærelastiske, lineærelastisk-idealplastiske eller elastisk-plastiske spændingstøjningsrelationer for forspændingsstålet.

En stringent behandling af relaksationen med hensyntagen til kombineret langtids-korttidslast er ikke foretaget. I stedet for indregnes relaksationsbidraget i den neutraliserede forspænding, som er den spænding, der optræder i et givet forspændingskabel, når den omgivende beton er spændingsfri.

4. FYSISKE BETINGELSER FOR BETON

I dette kapitel vil der først blive omtalt nogle spændings-tøjningsrelationer gældende for korttidspåvirkning. Derefter vises, hvordan disse relationer kan modificeres til at inkludere tidsafhængige effekter, idet der opstilles udtryk gældende for langtidspåvirkning, samt kombineret lang- og korttidspåvirkning.

4.1 Fysiske betingelser ved korttidsbelastning

Den simpleste formulering af betonens spændingstøjningsrelationer får man ved at betragte materialet som lineærelastisk:

$$\sigma_c = E_c \epsilon_c \quad \text{for} \quad \epsilon_c < \frac{f_{ct}}{E_c} = \epsilon_{ct} \quad (4.1)$$

$$\sigma_c = 0 \quad \text{for} \quad \epsilon_c \geq \epsilon_{ct} \quad (4.2)$$

I (4.1)-(4.2) angiver σ_c betonspændingen, E_c betonens korttidselasticitetsmodul og ϵ_c betontøjningen, medens f_{ct} og ϵ_{ct} angiver henholdsvis betontrækstyrken og trækbrudtøjningen.

Ved supplerung af udtrykkene (4.1)-(4.2) med angivelse af en korttidstrykstyrke f_c ,

$$\sigma_c = f_c \quad \text{for} \quad \frac{f_c}{E_c} = \epsilon_e \geq \epsilon_c \geq \epsilon_{cu}, \quad (4.3)$$

hvor ϵ_e og ϵ_{cu} angiver henholdsvis elasticitetsgrænsen og trykbrudtøjningen, får man betonens lineærelastisk-idealplastiske arbejdskurve, som ved mange anvendelser giver en tilstrækkelig nøjagtig beskrivelse af betonens spændingstøjnings forhold. Se figur 4.1.

Ønsker man en mere nøjagtig beskrivelse, må man anvende en elastisk-plastisk relation, idet betonen er ikke-lineær selv ved lave spændingsniveauer. Op til 40%-60% af brudspændingen er arbejdskurvens krumning dog forholdsvis begrænset, medens man over dette niveau iagttager større og større afvigelser fra det lineære forløb. Dette hænger sammen med dannelsen af mikrorevner

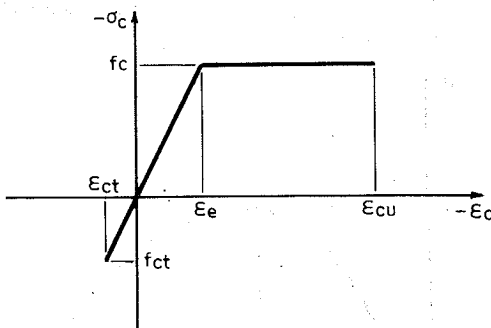


Fig. 4.1: Lineærelastisk-idealplastisk arbejdskurve for beton.

i større og større antal gennem materialet, hvilket kan konstateres ved måling af den akustiske emission fra denne revnedannelse. Det punkt på arbejdskurven, hvor den stærkt forøgede akustiske aktivitet starter, betegnes diskontinuitetspunktet, se [Newman.68-1].

En simpel funktion, som tilnærmer de nævnte egenskaber i rimeligt omfang, er andengrads parabeln, som også er benyttet i CEB-FIP's rekommandationer [CEB.70-1]. Udtrykket er foreslået af Hognestad [Hognestad.51-1] og undersøgt og diskuteret i [Rüsch. 60-1], [Rüsch.62-1] og [Sargin.71-1]. Sargin omtaler endvidere en lang række andre spændings-tøjningsrelationer for beton og har selv udviklet et generelt udtryk, hvoraf adskillige af de øvrige udtryk kan udledes som specialtilfælde.

Spændingstøjningsrelationen byggende på andengradsparabeln er illustreret på figur 4.2 og givet ved følgende udtryk :

$$\sigma_c = E_c \epsilon_c \quad \text{for } \epsilon_{ct} \geq \epsilon_c \geq 0, \quad (4.4)$$

$$\sigma_c = f_c \left(2 \left(\frac{\epsilon_c}{\epsilon_0} \right) - \left(\frac{\epsilon_c}{\epsilon_0} \right)^2 \right) \quad \text{for } 0 \geq \epsilon_c \geq \epsilon_0, \quad (4.5)$$

$$\sigma_c = f_c \left(1 - \left(\frac{\epsilon_c - \epsilon_0}{\epsilon_1 - \epsilon_0} \right)^2 \right) \quad \text{for } \epsilon_0 \geq \epsilon_c \geq \epsilon_{cu}, \quad (4.6)$$

hvor parablerne (4.5) og (4.6) har fælles toppunkt i (ϵ_0, f_c) , og (4.6) skærer tøjningsaksen i $(\epsilon_1, 0)$.

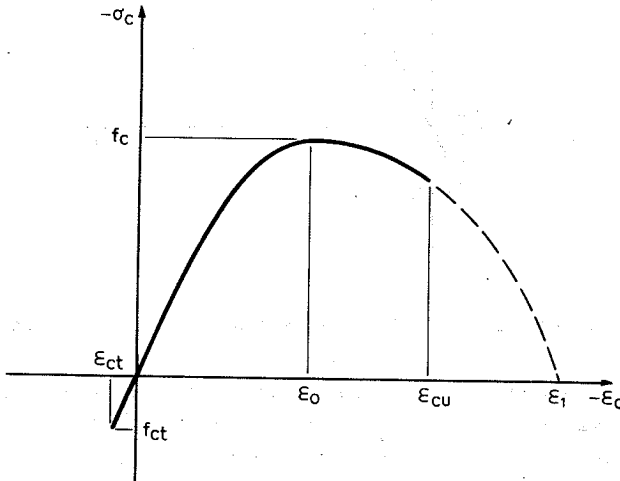


Fig. 4.2: Idealiseret elastisk-plastisk arbejdscurve for beton.

I CEB-FIP's forslag, som egentlig er en regningsmæssig spændingsfordeling for bøjning og normalkraft i brudstadiet, benyttes $\epsilon_0 = -0.002$ og $\epsilon_{cu} = -0.0035$, samt parabelen (4.6) er erstattet af

$$\sigma_c = f_c \quad \text{for } \epsilon_0 \geq \epsilon_c \geq \epsilon_{cu} \quad (4.7)$$

Idet (4.7) svarer til at benytte $\epsilon_1 = \infty$ i (4.6), er CEB-FIP's forslag omfattet af formelen (4.6), som er medtaget i spændingstøjningsrelationerne i stedet for (4.7) for at tilføje den fleksibilitet, der ligger i muligheden af at kunne anvende forskellige udformninger af den aftagende spændingsgren. En arbejdscurve svarende til (4.4)-(4.6) er angivet i afsnit 2.5 i [CEB.78-1].

En oversigt over forskellige spændingstøjningsrelationer er angivet i [Popovics.70-3].

4.2 Fysiske betingelser ved langtidsbelastning

Ved langtidsbelastning må indflydelsen på betonens spændingstøjningsrelationer af tidsafhængige effekter som svind og krybning tages i betragtning, medens dynamisk påvirkning og tøjningshastighed ikke er medtaget i den aktuelle problemstilling.

Svind har, idet der udelukkende betragtes ensformigt fordelt svind, kun indflydelse på spændings-tøjningsrelationerne, hvis det betragtede konstruktionselement ikke kan deformere sig frit, idet der under sådanne betingelser vil induceres trækspændinger i elementet svarende til, at dettes dimensioner i spændingsfri tilstand nu er mindre. Benyttes denne spændingsløse tilstand som udgangspunkt for beregningen af tøjningerne, vil man få en korrekt beregning af svindets indflydelse på spændingstilstanden. I [CEB.72-1] og [CEB.73-2] er angivet, hvordan svindtøjningen beregnes som funktion af konstruktionselementets dimensioner (teoretisk tykkelse), den relative luftfugtighed, temperatur, samt betonens konsistens og hærdningshastighed.

Ved bestemmelse af krybningens indflydelse på betonens fysiske betingelser er forholdene langt mere komplicerede end ved svindberegningen. De komplicerede forhold har betydet, at man endnu ikke er nået til en fuldstændig forståelse af fænomenet krybning på trods af en omfattende forskning på området, se f.eks.

[Neville.70-2], [CEB.72-1], [CEB.73-2], [CS.74-1], [Rüsch.73-4], [Nielsen.74-3], [Illston.74-2] og [Rüsch.76-2].

Ved krybningsberegninger opdeles den totale tøjning som vist på figur 4.3 i 3 bidrag: et elastisk, et forsinket elastisk (visko-elastisk) og et plastisk bidrag.

Det elastiske bidrag følger lastvariationerne momentant, medens de øvrige bidrag, som sammenfattende betegnes krybningsbidraget, udvikles med tiden. Af krybningsbidraget udvikles det forsinkede elastiske bidrag i løbet af få uger og antager derefter en konstant værdi, som er uafhængig af betonens alder på det tidspunkt, belastningen påføres, se [Glücklich.61-1] og [Illston.65-1].

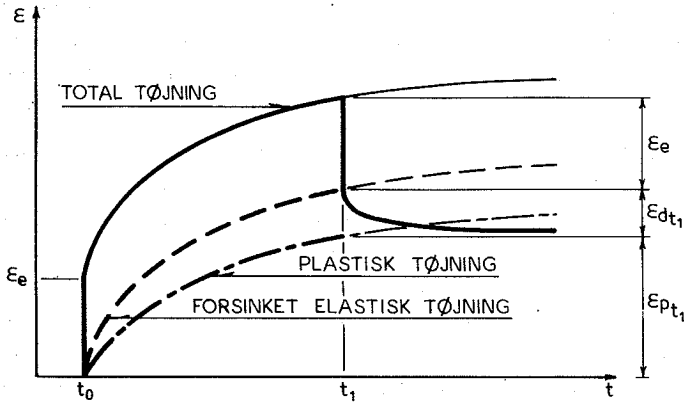


Fig. 4.3: Tøjnings-tidsdiagram for beton under konstant spændingstilstand i tidsintervallet $t_0 < t < t_1$.

Grænseværdien antages at udgøre 40% af den momentane elastiske deformation, og antages at være uafhængig af det omgivende miljø og den anvendte cementtype, [CEB.72-1]. Det plastiske bidrag kan være op til flere år om at nå en grænseværdi, som i høj grad afhænger af betonens alder på belastningstidspunktet. Sidstnævnte forhold er illustreret på figur 4.4, hvorder dels er vist en

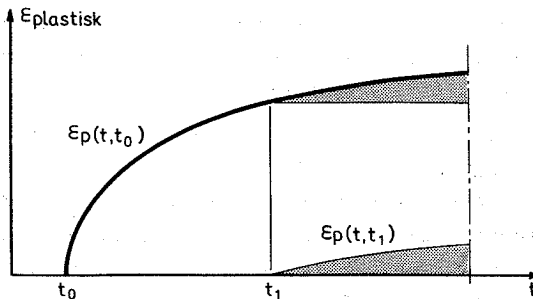


Fig. 4.4: Den plastiske krybnings afhængighed af betonens alder på belastningstidspunktet.

basiskurve $\epsilon_p(t, t_0)$ for den plastiske tøjning svarende til påsætning af belastningen til tiden t_0 umiddelbart efter afbindingen, dels en kurve $\epsilon_p(t, t_1)$ svarende til lastpåføring på et senere tidspunkt t_1 . Sidstnævnte kurve kan afledes af basiskurven som vist på figuren.

Til beregning af den totale krybning eller den plastiske del af krybningen er der udviklet en række metoder, se [CS.74-1], [CEB.73-2] og [CEB.72-1], hvoraf de fleste forudsætter en lineær sammenhæng imellem spændinger og tøjninger. Den simpleste af disse metoder bygger på anvendelse af en effektiv elasticitetsmodul E_{cL} :

$$E_{cL} = \frac{\sigma_c}{\epsilon_e + \epsilon_{cr}} = \frac{\sigma_c}{\sigma_c/E_c + \sigma_c \phi_1} = \frac{E_c}{1 + \phi_1 E_c} \quad (4.8)$$

hvor ϵ_e og ϵ_{cr} er henholdsvis den elastiske tøjning og krybetøjningen, medens ϕ_1 er den specifikke krybning, hvilket vil sige krybningen svarende til spændingen $\sigma_c = 1$. Denne metode er ikke så nøjagtig som superpositionsmetoden, krybningstilvækstmetoden og lignende metoder, se f.eks. [CS.74-1], men giver alligevel en nøjagtighed, som er fuldt tilstrækkelig ved de fleste beregninger. Formlerne (4.1)-(4.3) skal derfor ved langtidsbelastning ændres til :

$$\sigma_L = E_{cL} \epsilon_L \quad \text{for } \epsilon_{ct} \geq \epsilon_L \geq \epsilon_e, \quad (4.9)$$

$$\sigma_L = 0 \quad \text{for } \epsilon_L \geq \epsilon_{ct}, \quad (4.10)$$

$$\sigma_L = f_{cL} \quad \text{for } \epsilon_e \geq \epsilon_L \geq \epsilon_{cu}, \quad (4.11)$$

hvor f_{cL} angiver trykbrudstyrken ved langtidsbelastning. Denne kan ifølge [Rüsch.60-1] sættes til

$$f_{cL} = 0.85 f_c \quad (4.12)$$

hvor f_c er korttidstrykstyrken.

Anvendes der elastisk-plastiske korttidsarbejdskurver, kompliceres beskrivelsen af betonens rheologiske opførsel betydeligt, idet man ved spændingsniveauer over 40-60% af korttidsbrudstyrken ikke længere kan anvende de nævnte metoder til beregning af krybningen. Dette skyldes, at disse metoder forudsætter gyldighed af den lineære krybelov - proportionalitet mellem krybetøjning og spændingsniveau, hvis spændingen holdes konstant.

Den lineære krybelov :

$$\epsilon_{cr} = \phi_1(t_0, t) \cdot \sigma_c \quad (4.13)$$

I stedet for denne krybelov kan man basere sig på en krybelov, som forudsætter proportionalitet mellem krybetøjningen og korttidstøjningen, se f.eks. [Aas-Jakobsen.73-11], idet denne giver en bedre tilnærmelse til forsøgsresultaterne.

$$\epsilon_{cr} = \phi_2(t_0, t) \cdot \epsilon_c \quad (4.14)$$

Ved små spændinger er der næsten linearitet imellem σ_c og ϵ_c , og (4.13) og (4.14) er derfor identiske i dette område, idet

$$\begin{aligned} \epsilon_{cr} &= \phi_2(t_0, t) \cdot \epsilon_c = (\phi_2(t_0, t) \cdot \frac{1}{E_c}) \cdot \sigma_c \\ &= \phi_1(t_0, t) \cdot \sigma_c \end{aligned} \quad (4.15)$$

I de specifikke krybefunktioner $\phi(t_0, t)$ angiver t_0 og t henholdsvis belastningstidspunktet og det betragtede tidspunkt.

De ikke-lineære spændingstøjningsrelationer ved langtidsbelastning kan derfor svarende til (4.4)-(4.6) skrives :

$$\sigma_L = \frac{E_c}{1+\phi_2} (1+\phi_2) \epsilon_c = \frac{E_c}{1+E_c \phi_1} \epsilon_L$$

$$= E_{cL} \epsilon_L \quad \text{for } \epsilon_{ct} \geq \epsilon_L \geq 0, \quad (4.16)$$

$$\sigma_L = f_{cL} \left(2 \frac{\epsilon_L}{(1+\phi_2)\epsilon_0} - \left(\frac{\epsilon_L}{(1+\phi_2)\epsilon_0} \right)^2 \right)$$

$$= f_{cL} \left(2 \frac{\epsilon_L}{\epsilon_{OL}} - \left(\frac{\epsilon_L}{\epsilon_{OL}} \right)^2 \right) \quad \text{for } 0 \leq \epsilon_L \leq \epsilon_{OL} , \quad (4.17)$$

$$\sigma_L = f_{cL} \left(1 - \left(\frac{\epsilon_L - (1+\phi_2)\epsilon_0}{(1+\phi_2)\epsilon_1 - (1+\phi_2)\epsilon_0} \right)^2 \right)$$

$$= f_{cL} \left(1 - \left(\frac{\epsilon_L - \epsilon_{OL}}{\epsilon_{1L} - \epsilon_{OL}} \right)^2 \right) \quad \text{for } \epsilon_{OL} \leq \epsilon_L \leq \epsilon_{cu} , \quad (4.18)$$

hvor E_{cL} og ϵ_L er henholdsvis langtidselasticitetsmodul og langtidstøjning. f_{cL} er betonens langtidstrykstyrke, og ϵ_{OL} henholdsvis ϵ_{1L} er langtidsværdier af ϵ_0 og ϵ_1 .

4.2.1 Beregningseksempel.

Til illustration af et tværsnit påsat langtidslast betragtes det på figur 4.5 viste enkeltsymmetriske, rektangulære, armerede betontværsnit.

Ved beregningen benyttes lineære arbejdskurver for beton og armering.

Den neutraliserede forspænding, som er defineret, som den spænding man har i kablet, når spændingerne i den omgivende beton er lig med 0, sættes til 800 MPa. Denne spænding antages at være beregnet under hensyntagen til friktion ved opspændingen og spændarmeringens relaxsation. Elasticitetsmodulen for den forspændte og ikke-forspændte armering sættes til $2.1 \cdot 10^5$ MPa. Der tages hensyn til betonens krybning ved at regne med, at forholdet mellem armeringens og betonens elasticitetsmoduler er lig med 20. Det vil sige, at betonens langtidselasticitetsmodul er lig med $1.05 \cdot 10^4$ MPa. En mere nøjagtig beregning af krybningen fås ved at beregne ϕ_1 efter CEB's rekommandationer og indsætte i (4.8). Ved spændingsberegningen ses der bort fra betonens evne til at optage trækspændinger.

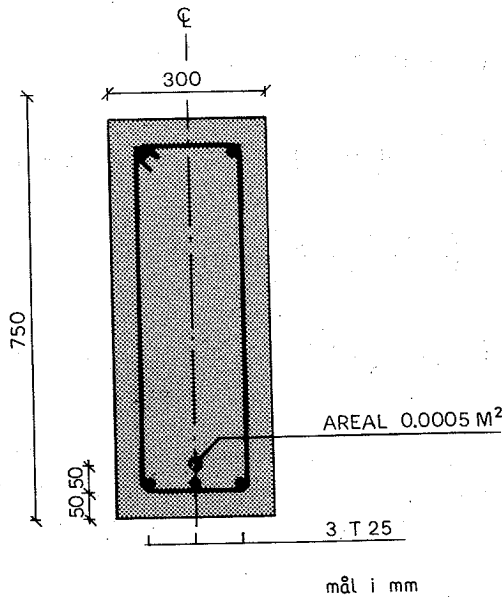


Fig. 4.5: Enkeltsymmetrisk, rektangulært, armeret betontværsnit.

Under disse forudsætninger ønskes den maksimale betonspænding, samt spændingerne i den forspændte og ikke-forspændte armering beregnet for en belastning bestående af et langtidsmoment af størrelsen 0.5 MNm. Nedenstående er angivet dele af EDB-udskriften for det aktuelle eksempel.

	X	Y	STRAIN	STRESS
	M	M	-	MPA
EFF. CROSS-SECTION:				
LONG-TIME EFF. SECTION:				
	1.500E-01	0.000E+00	-1.535E-03	-1.611E+01
	1.500E-01	3.793E-01	2.717E-07	2.853E-03
	-1.500E-01	3.793E-01	2.726E-07	2.863E-03
	-1.500E-01	0.000E+00	-1.535E-03	-1.611E+01
NON-PRESTRESSED STEEL:				
	1.000E-01	7.000E-01	1.298E-03	2.726E+02
	0.000E+00	7.000E-01	1.298E-03	2.726E+02
	-1.000E-01	7.000E-01	1.298E-03	2.726E+02
PRESTRESSED STEEL:				
	0.000E+00	6.500E-01	4.905E-03	1.030E+03

Af foranstående udskrift kan følgende aflæses.

Maksimal betonspænding (ved tværsnittets overside): $\sigma_L = - 16.1 \text{ MPa}$
Spænding i ikke-forspændt armering: $\sigma_s = 272.6 \text{ MPa}$
Spænding i forspændt armering: $\sigma_p = 1030 \text{ MPa}$

(4.19)

En kontrol af disse resultater er foretaget i Appendix C, hvor eksemplet er regnet igennem efter principperne i [Brøndum-Nielsen. 73-3].

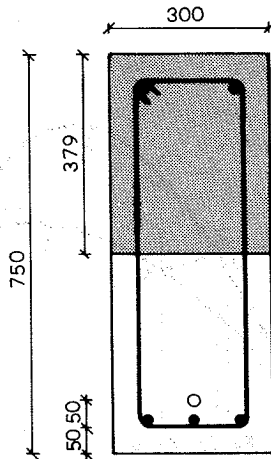
Fra denne beregning fås:

$$\sigma_L = - 16.2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_s = 274 \text{ MPa} \quad (4.20)$$

$$\sigma_p = 1030 \text{ MPa}$$

Det effektive betontværsnit er angivet på figur 4.6.



mål i mm.

Fig. 4.6: Effektivt tværsnit for $M = 0.5 \text{ MNm}$.

4.3 Fysiske betingelser ved kombineret langtids- og korttidsbelastning.

Kombineret langtids- og korttidsbelastning er tidligere behandlet for tilfælde med lineære materiaalegenskaber, se f.eks. [Brøndum-Nielsen.73-3]. Her vil der blive foreslået spændingstøjningsrelationer for kombineret langtids- og korttidsbelastning, som omfatter lineærelastiske, lineærelastisk-idealplastiske og elastisk-plastiske materiaalegenskaber. Derefter vil der blive vist, hvorledes man ved benyttelse af disse spændingstøjningsrelationer kan beregne vilkårlige betontværsnit armeret med forspændt og/eller ikke-forspændt armering udsat for en kombineret langtids- og korttidsbelastning.

4.3.1 Spændingstøjningsrelationernes principielle opbygning.

Principperne i de kombinerede spændingstøjningsrelationer forklares lettest ved anvendelse af figur 4.7, som beskriver tidsudviklingen af en given spændingstøjningstilstand.

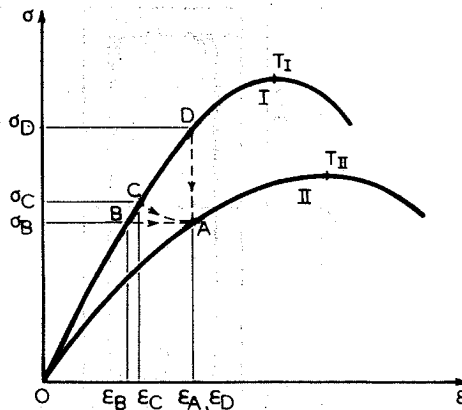


Fig. 4.7: Tidsudvikling af en spændingstøjningstilstand.

På figur 4.7 er angivet en langtidstilstand A, som kan tænkes frembragt på forskellig måde. Belastningen kan som en teoretisk mulighed tænkes påført så langsomt, at krybningen kan nå at udvikles på hvert enkelt spændingstrin, hvilket svarer til tilstandsvejen OA. Påføres belastningen på én gang, er der adskillige mulige tilstandsveje, som blandt andre inkluderer OBA, OCA og ODA. Af disse svarer OBA til momentan belastning på korttidsarbejdskurven I efterfulgt af ren krybning. ODA svarer ligeledes til momentan belastning på I, men efterfulgt af ren relaxation, idet spændingerne i tværsnittet i dette tilfælde omlejrer sig, således at tøjningstilstanden ikke ændres.

Det virkelige forløb vil imidlertid oftest ligge i nærheden af OBA og imellem dette og forløbet ODA. Disse betingelser opfyldes af OCA, som er valgt således, at en transformation af korttidsarbejdskurven I over i langtidsarbejdskurven II vil føre C over i A, og tilsvarende vil toppunktet T_I blive ført over i toppunktet T_{II} . I det følgende vil der blive benyttet forløb af typen OCA til beskrivelse af langtidsbelastningen.

Der betragtes nu et belastningsforløb bestående af en langtidsbelastning overlejret af en korttidsbelastning. I et givet punkt af det betragtede betontværsnit resulterer langtidsbelastningen i en spænding σ_L med en tilhørende tøjning ϵ_L svarende til punktet A på figur 4.8.

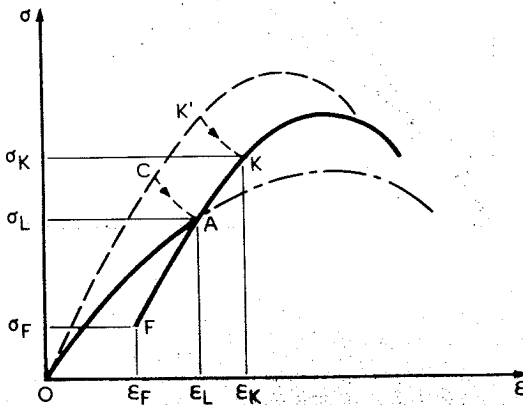


Fig. 4.8: Kombineret langtids- og korttidsbelastning.

Langtidsbelastningen overlejres herefter med en korttidsbelastning, som medfører, at tilstandspunktet flytter fra A til K i spændingstøjningsplanen på figur 4.8. Dette punkt svarer derfor til belastningsvejen OCAK, som beregningsmæssigt er identisk med OAK. Dette betyder, at langtidsarbejdskurven II figur 4.7 benyttes til bestemmelse af A, hvorefter en yderligere belastning vil følge korttidsarbejdskurven med udgangspunkt i A. Begyndelsespunktet på korttidsarbejdskurven vælges som det til A svarende punkt C, jvf. figur 4.8. Ved at benytte enslyggende punkter på de to arbejdskurver, hvilket vil sige punkter, der er sammenfaldende ved transformation af den ene kurve over i den anden, opnår man, at den kombinerede trykbrudspænding afhænger af langtids-spændingens størrelse, se figur 4.9. Dette forhold synes rimeligt, især hvis man betragter en langtids-spændingstilstand, som ligger i nærheden af arbejdskurvens toppunkt. For en sådan tilstand vil mikrorevnerne i betontrykzonen være stærkt udviklet, og det synes derfor rimeligt, at en korttidsbelastning ikke kan øge brudstyrken nævneværdigt.

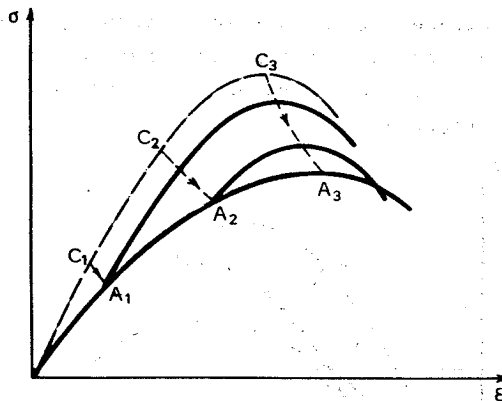


Fig. 4.9: Den kombinerede trykbrudstyrke afhænger af langtids-spændingsniveauet.

Den foranstående omtale af kombineret langtids- og korttidspåvirkning har koncentreret sig om tilvækster i korttidsbelastningen,

medens aflastningen ikke er blevet berørt. Aflastningen foregår lineærelastisk langs en linie med samme hældning som korttidskurvens initialhældning og med udgangspunkt i punkt A på figur 4.8. Halvlinien AF med udgangspunkt i A angiver aflastningsgrenen svarende til langtidstilstanden A.

Det fremgår af ovenstående betragtninger, at de konstitutive ligninger for kombineret langtids- og korttidsbelastning afhænger af det opnåede langtidsspændingsniveau. I det generelle tilfælde vil dette spændingsniveau variere over et givet betontværsnit, hvilket medfører, at man skal benytte forskellige arbejdskurver for forskellige tværsnitpunkter.

De udviklede formeludtryk for disse arbejdskurver, som er angivet i afsnit 4.3.2, inkluderer derfor langtidsspændingen σ_L og langtidstøjningen ϵ_L , der ligesom de øvrige spændinger og tøjninger regnes positive som træk og forlængelse.

4.3.2 Spændingstøjningsrelationer for kombineret langtids- og korttidsbelastning.

Spændingstøjningsrelationerne deles op i belastnings- og aflastningsformler ved brug af følgende definitioner, hvor ϵ_T angiver den totale tøjning:

$$\text{Belastning: } \epsilon_T \leq \epsilon_L \quad (4.21)$$

$$\text{Aflastning: } \epsilon_T > \epsilon_L \quad (4.22)$$

4.3.2.1 Elastisk-plastiske materialeegenskaber.

På grund af opbygningen af korttids- og langtidsarbejdskurverne, se formlerne (4.4)-(4.6) og (4.16)-(4.18), som udgør komponenterne i de kombinerede arbejdskurver, samt indflydelsen af langtids-spændingsniveauet har det været nødvendigt at opsplitte de udviklede, kombinerede langtids- og korttidsarbejdskurver i en hel række formler.

A. Belastning ($\epsilon_T \leq \epsilon_L$).

Spændingstøjningsrelationerne udgøres af formlerne med understregede formelnumre, medens de øvrige formler er hjælpeudtryk. Relationerne er grupperet i overensstemmelse med inddelingen af langtidsarbejdskurven, se (4.16)-(4.18). De kombinerede, totale spændinger og tøjninger betegnes henholdsvis σ_T og ϵ_T og regnes ligesom de øvrige spændinger og tøjninger positive som træk og forlængelse.

$$\epsilon_{ct} < \epsilon_L$$

$$\epsilon_T \geq 0 : \sigma_T = 0 \quad (4.23)$$

$$0 > \epsilon_T \geq \epsilon_0 : \sigma_T = f_c \left(2 \left(\frac{\epsilon_T}{\epsilon_0} \right) - \left(\frac{\epsilon_T}{\epsilon_0} \right)^2 \right) \quad (4.24)$$

$$\epsilon_0 > \epsilon_T \geq \epsilon_{cu} : \sigma_T = f_c \left(1 - \left(\frac{\epsilon_T - \epsilon_0}{\epsilon_1 - \epsilon_0} \right)^2 \right) \quad (4.25)$$

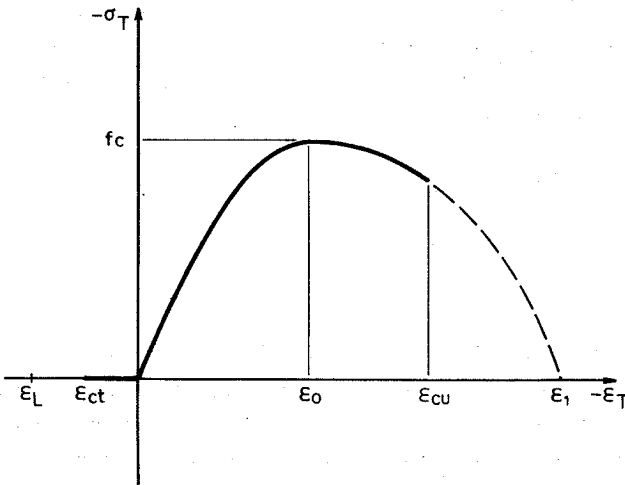


Fig. 4.10: Langtids-korttidsarbejdskurve for $\epsilon_{ct} < \epsilon_L$.

$$\underline{\epsilon_{ct} \geq \epsilon_L \geq 0}$$

For positive totale spændinger er spændingstøjningsrelationerne lineære.

$$\begin{aligned} \sigma_T &= E_{cL} \epsilon_L + E_c (\epsilon_T - \epsilon_L) \geq 0 \\ \Leftrightarrow \epsilon_T &\geq (1 - \frac{E_{cL}}{E_c}) \epsilon_L \quad (\geq 0) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Man får derfor

$$\sigma_T = E_{cL} \epsilon_L + E_c (\epsilon_T - \epsilon_L) \quad \text{for} \quad \epsilon_L \geq \epsilon_T \geq (1 - \frac{E_{cL}}{E_c}) \epsilon_L \quad (4.27)$$

For at lette beskrivelsen benyttes følgende hjælpetøjning ϵ_{TT} , som svarer til en forskydning af tøjningsaksens nulpunkt til det punkt, hvor langtids-korttidsarbejdskurven skærer denne akse. Man får

$$\epsilon_{TT} = \epsilon_T - (1 - \frac{E_{cL}}{E_c}) \epsilon_L \quad (4.28)$$

$$(1 - \frac{E_{cL}}{E_c}) \epsilon_L \geq \epsilon_T \geq \epsilon_0 + (1 - \frac{E_{cL}}{E_c}) \epsilon_L \quad (\text{eller } 0 \geq \epsilon_{TT} \geq \epsilon_0):$$

$$\sigma_T = f_c (2 (\frac{\epsilon_{TT}}{\epsilon_0}) - (\frac{\epsilon_{TT}}{\epsilon_0})^2) \quad (4.29)$$

$$\epsilon_0 + (1 - \frac{E_{cL}}{E_c}) \epsilon_L > \epsilon_T \geq \epsilon_{cu} \quad (\text{eller } \epsilon_0 > \epsilon_{TT} \geq \epsilon_{cu} - (1 - \frac{E_{cL}}{E_c}) \epsilon_L):$$

$$\sigma_T = f_c (1 - (\frac{\epsilon_{TT} - \epsilon_0}{\epsilon_1 - \epsilon_0})^2) \quad (4.30)$$

$$\underline{0 \geq \epsilon_L \geq \epsilon_{OL}}$$

Til brug ved beskrivelse af den kombinerede arbejdskurve i det angivne interval for ϵ_L benyttes følgende hjælpeestørrelser. Tøjningen til punkt C (se figur 4.12) på korttidsarbejdskurven:

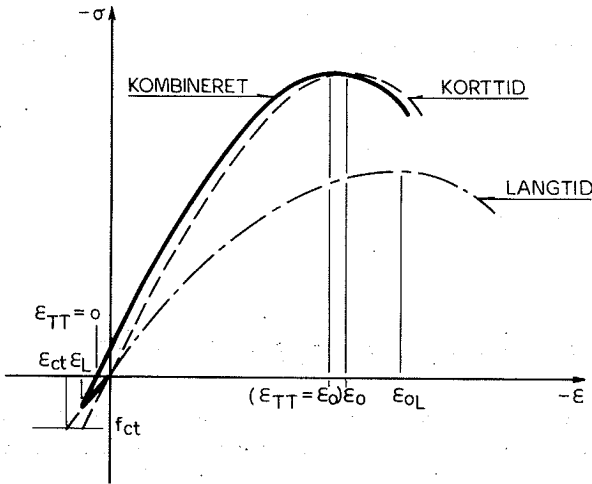


Fig. 4.11: Langtids-korttidsarbejdskurve for $\epsilon_{ct} \geq \epsilon_L \geq 0$.

$$\epsilon_{KL} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{OL}} \epsilon_L \quad (4.31)$$

Transformationen (4.31) ses at føre A på langtidskurven over i C på korttidskurven. ϵ_{TT} ændres her til

$$\epsilon_{TT} = \epsilon_T - \epsilon_L + \epsilon_{KL} , \quad (4.32)$$

som svarer til at ændre udgangspunktet for de overlejlrede korttidstøjninger fra punkt A til punkt C på figur 4.12.

Langtidsspændingen σ_L er givet ved

$$\sigma_L = f_{cL} \left(2 \left(\frac{\epsilon_L}{\epsilon_{OL}} \right) - \left(\frac{\epsilon_L}{\epsilon_{OL}} \right)^2 \right) \quad (4.33)$$

Den transformerede langtidsspænding σ_{KL} :

$$\sigma_{KL} = f_c \left(2 \left(\frac{\epsilon_{KL}}{\epsilon_0} \right) - \left(\frac{\epsilon_{KL}}{\epsilon_0} \right)^2 \right) \quad (4.34)$$

Ved benyttelse af formlerne (4.31)-(4.34) fås

$$\epsilon_L \geq \epsilon_T \geq \epsilon_0 + \epsilon_L - \epsilon_{KL} \text{ (eller } \epsilon_{KL} \geq \epsilon_{TT} \geq \epsilon_0 \text{):}$$

$$\sigma_T = f_c \left(2 \left(\frac{\epsilon_{TT}}{\epsilon_0} \right) - \left(\frac{\epsilon_{TT}}{\epsilon_0} \right)^2 \right) + \sigma_L - \sigma_{KL} \quad (4.35)$$

$$\epsilon_0 + \epsilon_L - \epsilon_{KL} > \epsilon_T \geq \epsilon_{cu} \text{ (eller } \epsilon_0 > \epsilon_{TT} \geq \epsilon_{cu} - \epsilon_L + \epsilon_{KL} \text{):}$$

$$\sigma_T = f_c \left(1 - \left(\frac{\epsilon_{TT} - \epsilon_0}{\epsilon_1 - \epsilon_0} \right)^2 \right) + \sigma_L - \sigma_{KL} \quad (4.36)$$

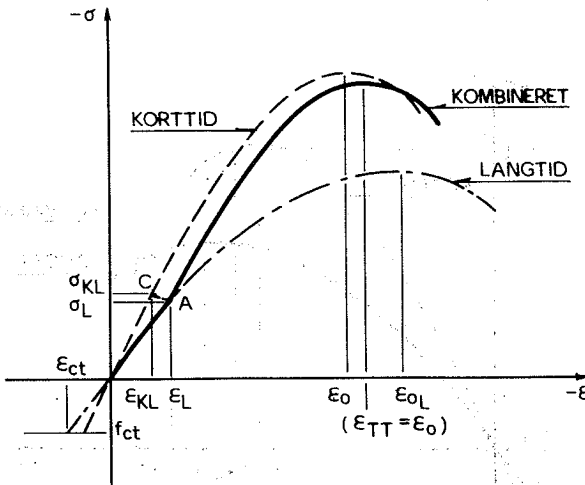


Fig. 4.12: Langtids-korttidsarbejdskurve for $0 > \epsilon_L \geq \epsilon_{OL}$.

$$\underline{\epsilon_{OL} > \epsilon_L \geq \epsilon_{cu}}$$

I dette område har udtrykket for ϵ_{KL} følgende udseende:

$$\epsilon_{KL} = \epsilon_0 + (\epsilon_L - \epsilon_{OL}) \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_{1L} - \epsilon_{OL}} \quad (4.37)$$

ϵ_{TT} er uændret givet ved (4.32).

$$\sigma_L = f_{cL} \left(1 - \left(\frac{\epsilon_L - \epsilon_{OL}}{\epsilon_{1L} - \epsilon_{OL}} \right)^2 \right) \quad (4.38)$$

$$\sigma_{KL} = f_c \left(1 - \left(\frac{\epsilon_{KL} - \epsilon_0}{\epsilon_1 - \epsilon_0} \right)^2 \right) \quad (4.39)$$

$$\epsilon_L > \epsilon_T \geq \epsilon_{cu} \text{ (eller } \epsilon_{KL} > \epsilon_{TT} \geq \epsilon_{cu} - \epsilon_L + \epsilon_{KL} \text{):}$$

$$\sigma_T = f_c \left(1 - \left(\frac{\epsilon_{TT} - \epsilon_0}{\epsilon_1 - \epsilon_0} \right)^2 \right) + \sigma_L - \sigma_{KL} \quad (4.40)$$

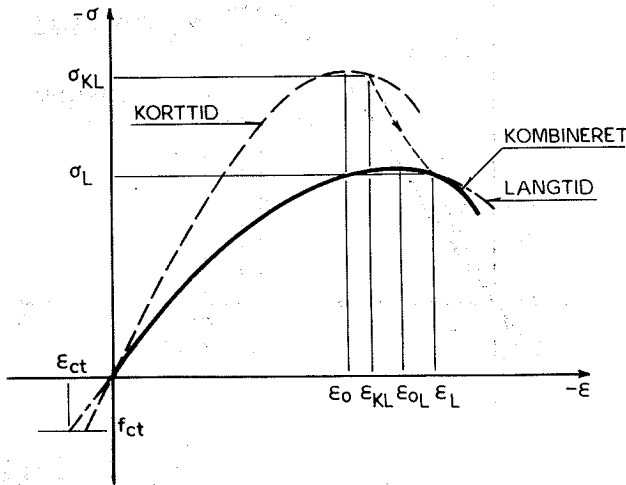


Fig. 4.13: Langtids-korttidsarbejdskurve for $\epsilon_{OL} > \epsilon_L \geq \epsilon_{cu}$.

B. Aflastning ($\epsilon_T > \epsilon_L$).

$$\epsilon_L > \epsilon_{ct} : \sigma_T = 0 \quad (4.41)$$

$$\epsilon_{ct} \geq \epsilon_L \geq 0 : \sigma_T = E_{cL} \epsilon_L + E_c (\epsilon_T - \epsilon_L) \quad (4.42)$$

$$0 > \epsilon_L \geq \epsilon_{OL} : \sigma_T = f_{cL} \left(2 \left(\frac{\epsilon_L}{\epsilon_{OL}} \right) - \left(\frac{\epsilon_L}{\epsilon_{OL}} \right)^2 \right) + E_c (\epsilon_T - \epsilon_L) \quad (4.43)$$

$$\epsilon_{OL} > \epsilon_L \geq \epsilon_{cu} : \sigma_T = f_{cL} \left(1 - \left(\frac{\epsilon_L - \epsilon_{OL}}{\epsilon_{1L} - \epsilon_{OL}} \right)^2 \right) + E_c (\epsilon_T - \epsilon_L) \quad (4.44)$$

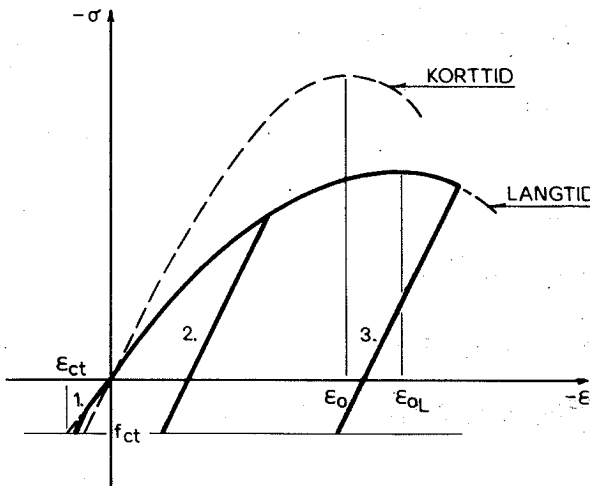


Fig. 4.14: 1., 2. og 3. er aflastningskurver svarende til (4.42), (4.43) og (4.44).

Ved de rene langtids- og korttidsarbejdskurver er trækbrudkriteriet formuleret i tøjningerne. Ved de kombinerede arbejdskurver er det mere hensigtsmæssigt at benytte trækbrudspændingen (se figur 4.14).

4.3.2.3 Lineærelastisk-idealplastiske materialeegenskaber.

Med udgangspunkt i de elastisk-plastiske spændingstøjningsrelationer får man følgende udtryk.

A. Belastning ($\epsilon_T \leq \epsilon_L$).

$$\epsilon_L > \epsilon_{ct}$$

$$\epsilon_T \geq 0 \quad : \quad \sigma_T = 0 \quad (4.45)$$

$$0 > \epsilon_T \geq \epsilon_e \quad : \quad \sigma_T = E_c \epsilon_T \quad (4.46)$$

$$\epsilon_e > \epsilon_T \geq \epsilon_{cu} \quad : \quad \sigma_T = f_c \quad (4.47)$$

$$\epsilon_{ct} \geq \epsilon_L \geq 0$$

$$\epsilon_L \geq \epsilon_T \geq \epsilon_e + (1 - \frac{E_{cL}}{E_c}) \epsilon_L :$$

$$\sigma_T = E_{cL} \epsilon_L + E_c (\epsilon_T - \epsilon_L) \quad (4.48)$$

$$\epsilon_e + (1 - \frac{E_{cL}}{E_c}) \epsilon_L \geq \epsilon_T \geq \epsilon_{cu} \quad : \quad \sigma_T = f_c \quad (4.49)$$

$$0 \geq \epsilon_L \geq \epsilon_{eL}$$

$$\epsilon_L \geq \epsilon_T \geq \epsilon_e + \epsilon_L - \epsilon_{KL} \text{ (eller } \epsilon_{KL} \geq \epsilon_{TT} \geq \epsilon_e \text{):}$$

$$\sigma_T = E_c (\epsilon_{TT} - \epsilon_{KL}) + E_{cL} \epsilon_L, \quad (4.50)$$

$$\text{hvor } \epsilon_{KL} = \frac{\epsilon_e}{\epsilon_{eL}} \epsilon_L \text{ og } \epsilon_{TT} = \epsilon_T - \epsilon_L + \epsilon_{KL}.$$

$$\epsilon_e + \epsilon_L - \epsilon_{KL} \geq \epsilon_T \geq \epsilon_{cu} \text{ (eller } \epsilon_e \geq \epsilon_{TT} \geq \epsilon_{cu} - \epsilon_L + \epsilon_{KL} \text{):}$$

$$\sigma_T = f_c + E_{cL} \epsilon_L - E_c \epsilon_{KL} \quad (4.51)$$

Indsættes $\epsilon_{KL} = \frac{\epsilon_e}{\epsilon_{eL}} \cdot \epsilon_L$ i (4.51) ser man, at langtids-korttids-brudspændingen afhænger af langtidsspændingsniveauet σ_L på følgende måde. For små værdier af σ_L og dermed ϵ_L fås brudspændinger nær korttidsstyrken, medens man for stigende σ_L får faldende styrker nærmende sig langtidstyrken f_{cL} . Man får specielt

$$\epsilon_L = 0 : \sigma_T = f_c \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_L = \epsilon_{eL} : \sigma_T &= f_c + E_{cL} \epsilon_{eL} - E_c \frac{\epsilon_e}{\epsilon_{eL}} \epsilon_{eL} \\ &= f_c + f_{cL} - f_c = f_{cL} \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$\epsilon_{eL} \geq \epsilon_L \geq \epsilon_{cu}:$$

$$\sigma_T = f_c + f_{cL} - f_c = f_{cL}, \quad (4.54)$$

(4.54) er analog til (4.40)

B. Aflastning ($\epsilon_T > \epsilon_L$)

$$\epsilon_L > \epsilon_{ct} : \sigma_T = 0 \quad (4.55)$$

$$\epsilon_{ct} \geq \epsilon_L \geq \epsilon_{eL} : \sigma_T = E_{cL} \epsilon_L + E_c (\epsilon_T - \epsilon_L) \quad (4.56)$$

$$\epsilon_{eL} \geq \epsilon_L \geq \epsilon_{cu} : \sigma_T = f_{cL} + E_c (\epsilon_T - \epsilon_L) \quad (4.57)$$

Hvis spændingen σ_T under aflastningen når værdien f_{ct} , indtræder der trækbrud i materialet.

4.3.2.3 Lineærelastiske materialeegenskaber.

Beskrivelsen kan i dette tilfælde indskrænkes til tre formler, idet de to kan benyttes til både belastning og aflastning.

A. Belastning ($\epsilon_T \leq \epsilon_L$)

$$\epsilon_L > \epsilon_{ct}$$

$$\epsilon_T \geq 0 : \sigma_T = 0 \quad (4.58)$$

$$0 \geq \epsilon_T \geq \epsilon_{cu} : \sigma_T = E_c \epsilon_T \quad (4.59)$$

$$\epsilon_{ct} \geq \epsilon_L \geq \epsilon_{cu}$$

$$\epsilon_L \geq \epsilon_T \geq \epsilon_{cu} :$$

$$\sigma_T = E_{cL} \epsilon_L + E_c (\epsilon_T - \epsilon_L) \quad (4.60)$$

B. Aflastning ($\epsilon_T > \epsilon_L$)

$$\epsilon_L > \epsilon_{ct} : \sigma_T = 0 \quad (4.61)$$

$$\epsilon_{ct} \geq \epsilon_L \geq \epsilon_{cu} : \sigma_T = E_{cL} \epsilon_L + E_c (\epsilon_T - \epsilon_L) \quad (4.62)$$

Trækbrudkriterium:

$$\sigma_T = f_{ct} \quad (4.63)$$

4.3.3 Beregningsmetodik for kombineret belastning.

En tværsnitsberegning for kombineret langtids- og korttidsbelastning opsplittes i to faser, hvoraf den første fase består af en gennemregning med langtidslast efter principperne i kapitel 2. Herved bestemmes tøjningsplanen for langtidsbelastningen svarende til (2.1):

$$\epsilon_L = \epsilon_{zL} + \kappa_{xL} y - \kappa_{yL} x \quad (4.64)$$

Herefter benyttes de kombinerede spændingstøjningsrelationer, hvori ϵ_L og σ_L indgår, sammen med de totale belastninger i ligevægtsligningerne (2.2)-(2.4). Herved bestemmes de totale tøjningsparametre og totalspændinger iterativt helt svarende til beregningen i kapitel 2.

Ved den kombinerede belastning vil en aflastning bevirke, at afgrænsningen af det effektive tværsnit ikke kan foretages ved hjælp af tøjningen eller tøjningsplanen, som af beregningstekniske grunde benyttes ved korttidsbelastning og langtidbelastning. Dette skyldes, at der ved kombineret belastning ikke længere er en entydig sammenhæng imellem trækbrudstyrken f_{ct} og tøjningen, jvf. figur 4.14, og man må derfor anvende f_{ct} direkte ved bestemmelsen af det effektive tværsnit.

På hvert iterationstrin og i ethvert tværsnitspunkt undersøges størrelsesforholdet imellem den estimerede totaltøjning ϵ_T og langtidstøjningen ϵ_L , se figur 4.15. Dette forhold er afgørende for, hvilken spændingstøjningsrelation, der vil blive benyttet i det pågældende punkt, idet man for $\epsilon_T \leq \epsilon_L$ får belastning, medens $\epsilon_T > \epsilon_L$ giver aflastning.

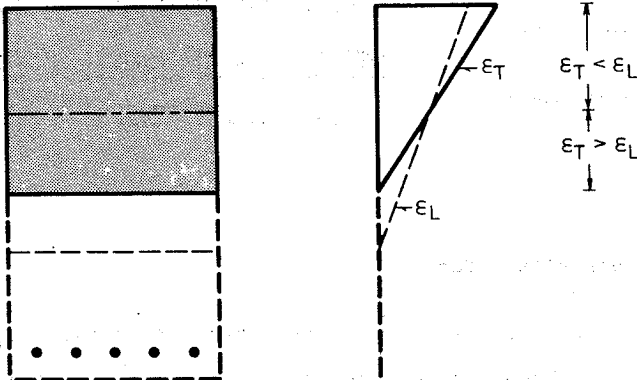


Fig. 4.15: Belastning i områder med totaltøjningen ϵ_T mindre end langtidstøjningen ϵ_L , aflastning for $\epsilon_T > \epsilon_L$. Tøjninger positive som forlængelse.

De specielle forhold, som er nævnt i dette afsnit, samt spændingstøjningsrelationerne i afsnit 4.3.2 er inkluderet i det udviklede EDB-program, som i dette og det næste kapitel vil blive beskrevet gennem en række beregningseksempler.

4.3.4 Beregningseksempel.

Til illustration af den kombinerede langtids-korttidsbelastning betragtes betontværsnittet i eksempel 4.2.1. De i dette eksempel angivne data regnes fortsat gældende, bortset fra det angivne moment 0.5 MNm, som forøges med 0.1 MNm regnet som korttidslast med $n = E_s/E_c = E_p/E_c = 7$. Dele af EDB-udskriften for en beregning med det kombinerede moment på 0.5 MNm + 0.1 MNm er angivet nedenstående. Beregningen af den rene langtidspåvirkning fremgår af eksempel 4.2.1.

	X	Y	STRAIN	STRESS
	M	M		MPa
EFF. CROSS-SECTION:				
SHORT-TIME EFF. SECTION:				
	1.360E-01	0.000E+00	-1.717E-03	-2.159E+01
	1.500E-01	3.291E-01	-1.343E-04	3.245E-03
	-1.500E-01	3.291E-01	-1.343E-04	3.245E-03
	-1.500E-01	0.000E+00	-1.717E-03	-2.159E+01
NON-PRESTRESSED STEEL:				
	1.000E-01	7.000E-01	1.660E-03	3.485E+02
	0.000E+00	7.000E-01	1.660E-03	3.485E+02
	-1.000E-01	7.000E-01	1.660E-03	3.485E+02
PRESTRESSED STEEL:				
	0.000E+00	6.500E-01	5.228E-03	1.098E+03

Af EDB-udskriften fås:

Maksimal betonspænding (ved tværsnittets overside): $\sigma_T = - 21.6$ MPa

Spænding i ikke-forspændt armering : $\sigma_s = 348.5$ MPa

Spænding i forspændt armering : $\sigma_p = 1098$ MPa

Højde af den effektive betontrykzone : 0.328 m

Påføres de 0.1 MNm som langtidslast fås betonspændingen σ_L til -19.8 MPa.

En kontrol af $\sigma_T = -21.6$ MPa, som er foretaget i Appendix C efter principperne i [Brøndum-Nielsen.73-3], giver samme resultat.

5. BEREGNINGSEKSEMPLER

I dette kapitel vil blive vist eksempler på beregninger udført under anvendelse af de i de foregående kapitler opstillede spændingstøjningsrelationer og den skitserede beregningsmetode. I det første eksempel belyses for et givet tværsnit og en given totalbelastning effekten af anvendelse af forskellige arbejdskurver for de indgående materialer. Næste eksempel behandler indflydelsen af langtidsbelastningens størrelse ved kombineret langtids-korttidspåvirkning. Derefter er belastningsforløbene for en serie forsøgsbjælker simuleret og beregningerne sammenlignet med forsøgsresultaterne. Forsøgene udførtes i 1974 på Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks tekniske Højskole. Endelig er der foretaget en beregning af en større brodrager med et betydeligt kabelantal og en kompliceret geometri.

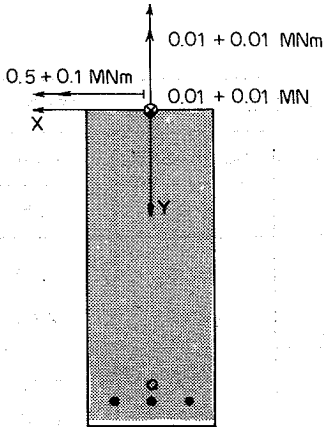
Eksempel 5.1.

Effekten ved brug af forskellige arbejdskurver

I eksemplet benyttes samme tværsnit som i eksemplerne 4.2.1 og 4.3.1. Belastningen, som fremgår af figur 5.1.A., består af en normalkraft angribende i tværsnittets øverste kant, samt en momentvektor opløst efter henholdsvis lodret og vandret. Belastningens størrelse er angivet ved to tal, hvoraf det første angiver langtidsbidraget og det sidste korttidsbidraget. Ved ren langtidsbelastning udgøres denne af summen af de to tal.

I skema 5.1 er de forskellige tilfælde beskrevet ved en række størrelser, hvis betydning fremgår af figur 5.1.B. Skemaets tre første linier beskriver de anvendte arbejdskurver, idet første linie angiver, om betonens arbejdskurve svarer til langtidsbelastning eller kombineret langtid-korttidsbelastning. Næste linie angiver, om arbejdskurverne for betonen og de to typer armering er lineær eller ikke-lineær, medens sidste linie angiver den anvendte trækstyrke for betonen.

A.



B.

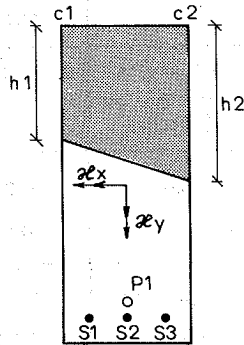


Fig. 5.1: Belastninger og signaturforklaring til de i skema 5.1 tabellerede størrelser.

Af skemaet ses, at tilfældet svarende til ren langtidsbelastning som forventet resulterer i store krumninger og et stort effektivt betonareal til etablering af den nødvendige betontryknormalkraft. Konverterer man en del af langtidsbelastningen til korttidsbelastning, har man tilstanden beskrevet i skemaets kolonne 2. Man ser, at man her får mindre krumninger, mindre effektivt betonareal og større betonspændinger. Derimod fås mindre stålspændinger, idet betonspændingernes resultant rykker opad, hvorved tværsnittets momentarm forøges.

Ved en sammenligning af kolonne 3. med kolonne 2. ses, at medregning af betontrækspændingerne kun har ringe effekt. Man ser, at krumningerne og betonspændingerne er næsten identiske, medens stålspændingerne i kolonne 3. er forøget ganske lidt, idet armeringen må overtage betontrækspændingernes bidrag til ligevægten.

Skema 5.1: Sammenligning af forskellige arbejdskurvers effekt på samme tværsnit og samme totale belastning.

TYPE	LANGTID	KOMBINERET LANGTID-KORTTID		
RELATION	IKKE-LINEÆR	IKKE-LINEÆR	IKKE-LINEÆR	LINEÆR
f_t [MPa]	2.5	2.5	0.0	2.5
h_1 [mm]	370.6	323.7	287.8	313.5
h_2 [mm]	485.8	438.0	404.3	417.5
$10^{-3} \kappa_x$ [m ⁻¹]	5.746	5.327	5.330	4.891
$10^{-3} \kappa_y$ [m ⁻¹]	-2.208	-1.612	-1.616	-1.361
σ_{c1} [MPa]	-15.9	-16.9	-16.9	-18.6
σ_{c2} [MPa]	-19.6	-21.2	-21.2	-25.6
σ_{p1} [MPa]	1109	1100	1103	1092
σ_{s1} [MPa]	424.7	398.9	401.5	380.1
σ_{s2} [MPa]	378.4	365.1	367.5	351.5
σ_{s3} [MPa]	332.0	331.4	333.6	323.0

Den relativt store ændring af h_1 og h_2 skyldes, at disse størrelser beskriver revnelinien og ikke nullinien.

Ændres materialernes arbejdskurver fra ikke-lineære til lineære, forventes en stivere respons fra systemet, hvilket bekræftes ved en sammenligning af kolonnerne 2. og 4. Man iagttager en reduktion af det effektive betonareal og af krumningerne, samt en ikke ubetydelig forøgelse af betonspændingerne på trods af krumningsreduktionerne. Også her rykker betonspændingernes resultat opad med en forøgelse af tværsnittets momentarm og dermed mindre stålspændinger til følge.

I appendix D er gengivet et komplet output svarende til kolonne 2. i skema 5.1.

Eksempel 5.2.

Virkningen af kombineret langtids-korttidsbelastning

Effekten af kombineret langtid-korttidsbelastning er undersøgt ved at foretage beregninger med samme tværsnit og en række forskellige værdier af både langtids- og korttidsbelastningsbidragene. Ved undersøgelsen er anvendt samme tværsnit, som i de hidtidige eksempler. Ved beregningerne er der anvendt ikke-lineære arbejdskurver for beton, slap og forspændt armering. De forskellige tværsnits- og materialedata fremgår af appendix D, bortset fra betontrækstyrken, som er sat til nul. Eksemplet tjener til at tydeliggøre, hvad der allerede er omtalt i eksempel 5.1 i forbindelse med sammenligningen af kolonne 1. og 2. i skema 5.1. På figur 5.2 er optegnet kurveskarer, som giver sammenhængen mellem det totale moment og betonspændingen ved tværsnittets øvre kant; henholdsvis krumningen i lodret plan, idet der kun er benyttet lodret belastning. De forskellige langtids-korttidsforløb fås ved at følge langtidskurven, indtil det givne langtidsmoment nås og derefter følge forgreningskurven.

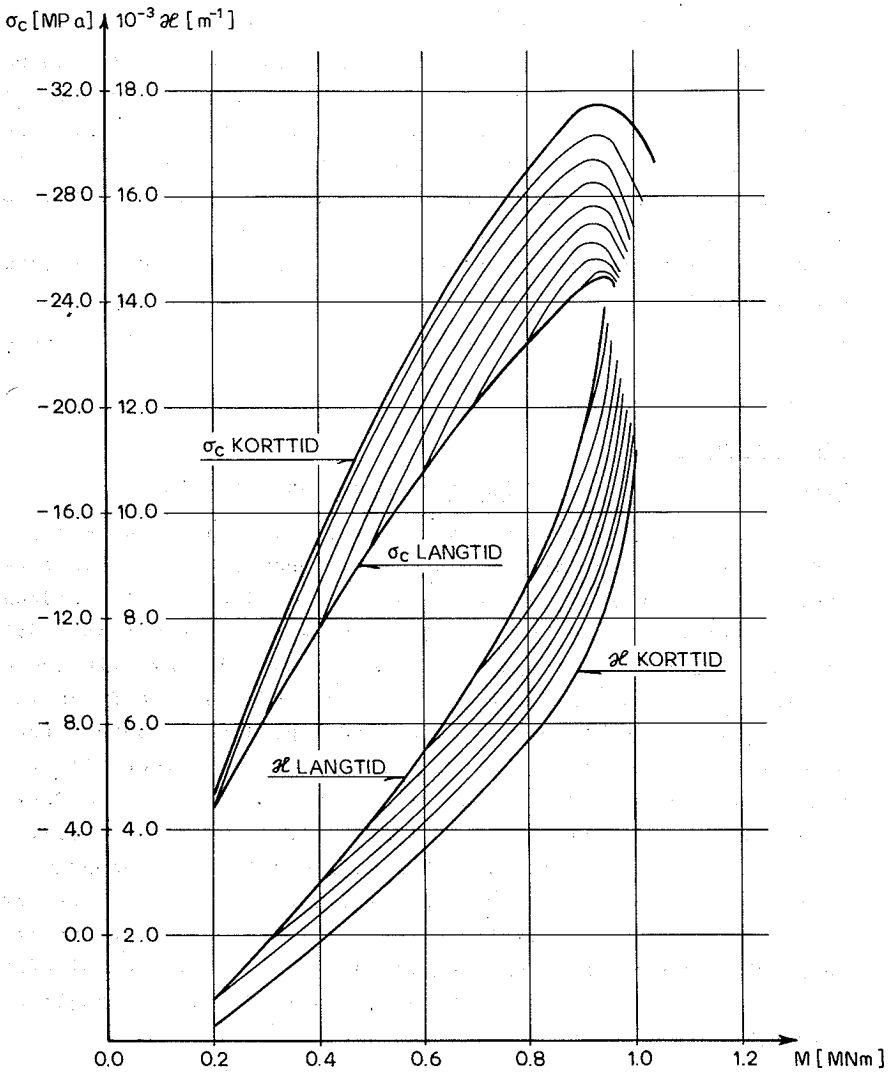


Fig. 5.2: Betonspændinger og tværsnitskrumninger som funktioner af det totale moment ved forskellige langtids-korttids-tilstande.

På figur 5.3 er moment-spændingskurverne for henholdsvis den slappe og den forspændte armering angivet. Kombinationer af langtids- og korttidstilstande dækkes af de rastede områder imellem langtids- og korttidskurverne.

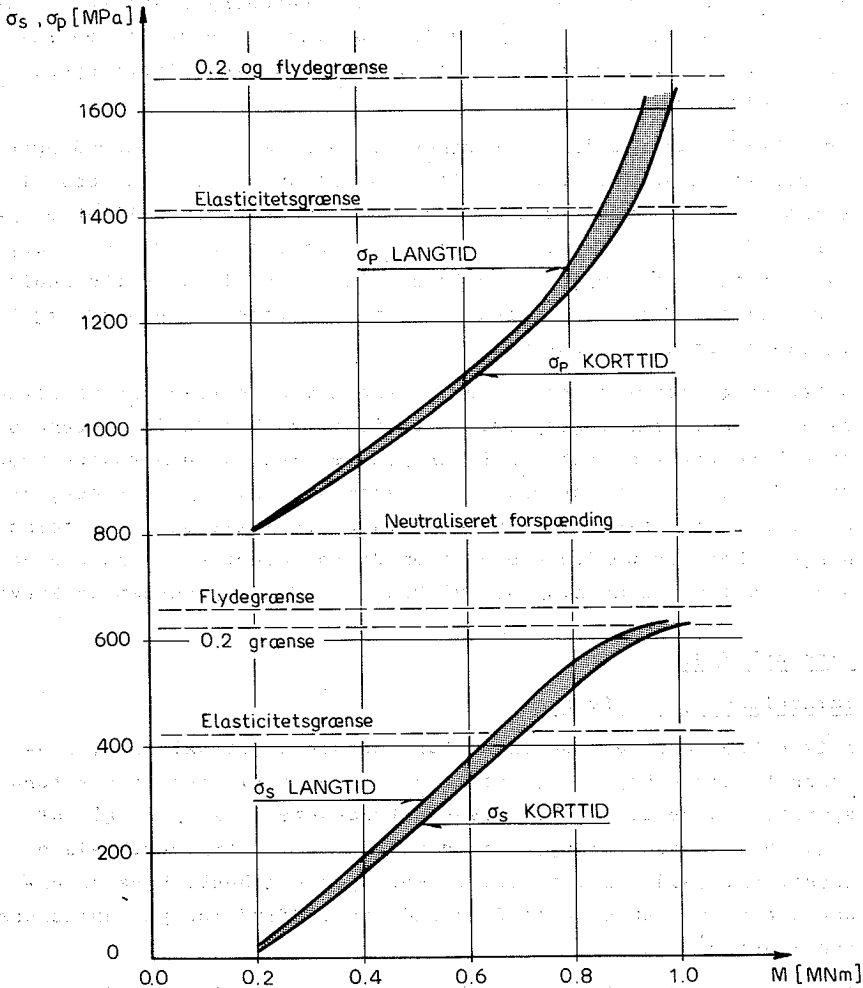


Fig. 5.3: Armeringsspændinger i henholdsvis den slappe og forspændte armering som funktion af det totale moment. Kombinerede langtids-korttidstilstande dækkes af de rastede arealer.

Betragter man figur 5.2, ser man tydeligt på krumningsforløbene, hvordan en ændring fra langtids- til korttidsbelastning af større og større dele af belastningen giver en stivere og stivere respons. Samtidig får man en større og større betonspænding i de mest trykkede fibre. Maximumsværdierne for disse spændinger svarer til praktisk talt samme belastning, hvilket betyder en ringe spredning i brudmomentets størrelse som funktion af langtidsbelastningens andel af totalbelastningen.

Overskrides belastningen svarende til maksimale betonspændinger i tværsnittets yderste fibre, vil maksimalpunktet flytte nedad i tværsnittet. Herved reduceres den indre momentarm, hvilket betyder en forøgelse af betonens og armeringens spændinger ud over, hvad belastningsforøgelsen ellers ville have givet. Dette medfører, som det fremgår af figur 5.2, meget store krumningsforøgelser og sluttelig brud i betonen.

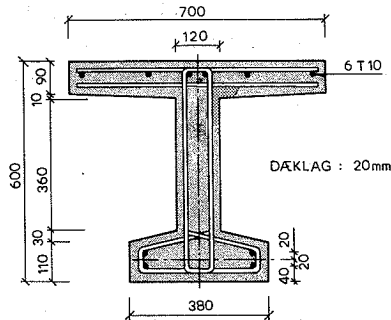
Dette brud indtræder stort set samtidig med indtrædelse af flydning i begge armeringstyper, og tværsnittet kan derfor betegnes et balanceret tværsnit. Af figur 5.3 ser man, at den slappe armering først overskrider elasticitetsgrænsen, hvilket betyder, at denne armering ikke længere kan optage den samme andel af belastningen. Den forspændte armering må derfor overtage en større og større del af belastningen, hvilket ses af de opadkrummede kurver.

Eksempel 5.3.

Sammenligning med forsøg

I 1974 blev der på Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks tekniske Højskole, udført en forsøgsserie med delvis forspændte betonbjælker, hvis tværsnitskarakteristika fremgår af figur 5.4. Disse forsøg, som er refereret i [Lyngberg.76-1] og [Lyngberg.77-1], blev foretaget med specielt henblik på en undersøgelse af den delvise forspændings indflydelse på bjælkernes forskydningsbæreevne.

Af figur 5.4 fremgår det, at belastningsopstillingen opdeler bjælken i to forskydningszoner nærmest understøtningerne og en ren bøjningszone i det centrale område. I dette eksempel er sam-



TRÆKARMERING :

A_p : 3stk. 8ø06 = 678mm²

A_s : 4 T14 = 616mm²

BJÆLKE : 1A-3

2A-3

2B-3



TRÆKARMERING :

A_p : 2stk. 8ø06 = 452mm²

A_s : 8 T14 = 1232mm²

BJÆLKE : 3A-2

3B-2

TRÆKARMERING :

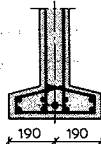
A_p : 1stk. 8ø06 = 226mm²

A_s : 4 T14 = 616mm²

4 T20 = 1257mm²

BJÆLKE : 4A-1

4B-1

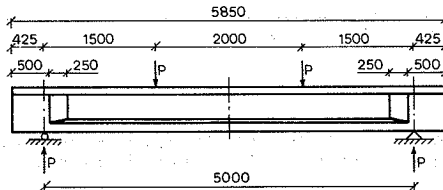


TRÆKARMERING :

A_s : 8 T20 = 2515mm²

BJÆLKE : 5A-0

5B-0



mål i mm.

Fig. 5.4: Tværsnitsdata og belastningsopstilling for forsøgsbjælker.

menhængen mellem krumningen og momentet i denne bøjningszone beregnet ved brug af henholdsvis lineære og ikke-lineære arbejdskurver for de indgående materialer, idet der er anvendt de materialedata, som materialeprøvningerne i forbindelse med bjælkeforsøgene resulterede i.

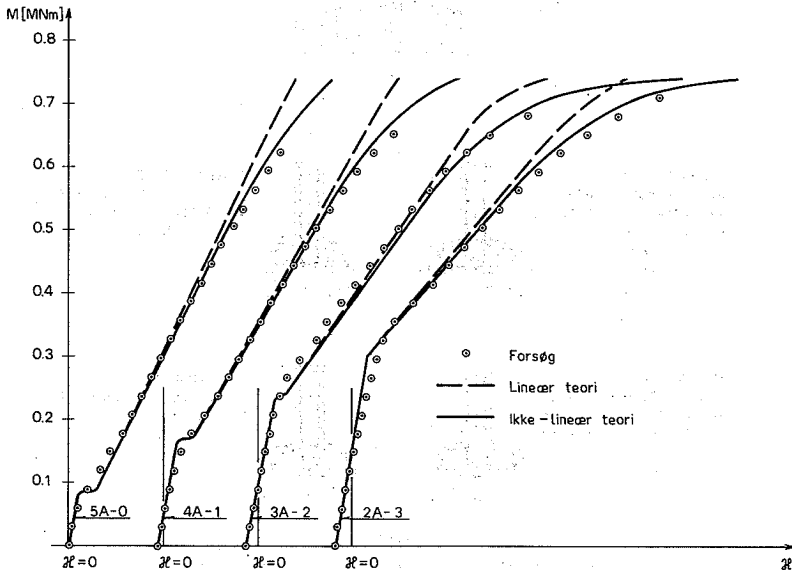


Fig. 5.5: Sammenligning mellem beregnede og målte moment-krumningsrelationer i bøjningszonen.

På figur 5.5 er disse beregninger sammenlignet med forsøgsresultaterne fra forsøgenes A-serie. Den lineære model giver ved høje værdier af momentet de ventede for små krumninger, medens den ikke-lineære model giver en langt bedre tilnærmelse i dette område. Ved modellerne må det stabile revnebillede nødvendigvis udvikles momentant, medens dette sker gradvist i den virkelige

bjælke, selvom der ved forsøgene er foretaget en række aflastninger for at gøre dette overgangsområde så lille som muligt. Mindre afvigelser mellem beregninger og forsøg må derfor forventes i det område, hvor den første revnedannelse sker, hvilket også fremgår af figur 5.5.

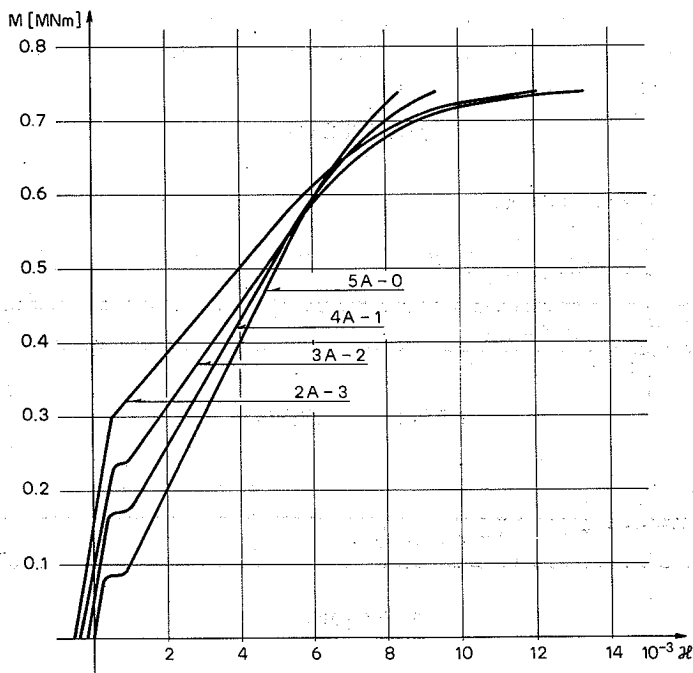


Fig. 5.6: Moment-krumningsrelationer svarende til den ikke-lineære beregningsmodel.

Ved forsøgene var det tilstræbt, at flydningen i armeringen skulle indtræde ved samme moment, således at man fik samme brudmoment. Prøvningen af den slappe armering viste imidlertid, at denne havde større styrke end forudset, således at en større andel af denne armering gav et større brudmoment, idet betontrykzonen ikke var fuldt udnyttet. På figur 5.6 kan dette forhold iagttages, idet kurverne med større andele af slap armering ikke flader ud, men

På figur 5.7 ses en brodrager, som er kontinuerlig over flere fag. Drageren er massiv over understøtningerne og hul ude i fagene, hvor udspæringerne opbygges over stykket AB, som angivet på figuren. Spændarmeringen består af 20 stk. 15T15 Freyssinet kabler med kabelføringer, hvis principielle forløb fremgår af figur 5.7.

Angives kabelplaceringerne med tilhørende neutraliserede forspændinger i et tilstrækkeligt antal snit til at definere kabelkurverne, samt betongeometrien i tværsnit med diskontinuerte ændringer i denne geometri, kan EDB-programmet generere et ønsket antal tværsnit med ækvidistant afstand f.eks. svarende til snittene 0 til 5 på figur 5.7. Påsættes i hvert af disse snit et moment svarende til en lodret total belastning, vil disse belastninger fremkalde biaxial bøjning i tværsnittene. I skema 5.2 er en række af resultaterne for en sådan beregning gengivet. Ved beregningerne er der anvendt følgende regningsmæssige brudstyrker for den spændte armering, samt for betonens langtids- og korttidsstyrke:

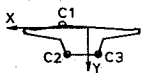
1200.MPa, - 18.75 MPa og - 25.0 MPa.

Betonens trækstyrke er sat til 0.

Af skema 5.2 fremgår det, at beregningerne er gennemført med både lineære og ikke-lineære arbejdskurver for beton og armering. For begge disse materialemodeller er belastningen bestående af hvilede last og trafiklast påsat dels som langtidsbelastning, dels som kombineret langtids-korttidsbelastning med trafikbelastningen som korttidslast. Sammenligningen mellem de forskellige beregningstyper udviser i dette eksempel helt samme tendenser som omtalt i eksemplerne 5.1 og 5.2.

En analyse af beregningsresultaterne vil ikke blive foretaget, idet hensigten med eksemplet blot er at vise beregningsmulighederne. Derfor vil kun en enkelt detalje, nulliniens drejning som funktion af belastningen, blive omtalt. Betragter man krumningerne κ_x og κ_y , vil man iagttage, at nullinien drejer i negativ omløbsretning fra snit 0 til snit 5. For tilfældet med ikke-lineære arbejdskurver og langtidsbelastning får man eksempelvis følgende nullinieholdninger regnet fra x-aksen i negativ omløbsretning:

Skema 5.2: Et udvalg af beregningsresultaterne svarende til biaxial bøjning af forspændt brodrager.

	M_{LANG}	M_{KORT}	$10^{-5} \times \Delta \epsilon_x$	$10^{-5} \times \Delta \epsilon_y$	σ_{C1}	σ_{C2}	σ_{C3}	σ_{p1}	σ_{p15}
	[MNm]	[MNm]	[m ⁻¹]	[m ⁻¹]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]
SNIT 0	Neutral forspænding for kablerne 1 og 15 : $\sigma_{p0} = 954,0$ MPa								
LIN. LANGTID	-46.6	0.0	-84.5	2.29	—	-14.8	-15.4	912.9	949.8
LIN. KORTTID	-37.3	-9.3	-65.2	1.79	—	-14.9	-15.6	901.2	929.6
NONLIN. LANGTID	-46.6	0.0	-108.1	2.92	—	-13.9	-14.3	911.6	959.1
NONLIN. KORTTID	-37.3	-9.3	-81.0	2.22	—	-14.0	-14.5	898.7	934.1
SNIT 1	$\sigma_{p0} = 976.0$ MPa								
LIN. LANGTID	-18.8	0.0	-56.4	1.80	-0.2	-10.7	-11.1	879.0	902.0
LIN. KORTTID	-15.0	-3.8	-48.4	1.59	-0.2	-10.7	-11.1	880.8	900.3
NONLIN. LANGTID	-18.8	-0.0	-66.3	2.08	0.0	-10.3	-10.5	868.3	895.6
NONLIN. KORTTID	-15.0	-3.8	-56.5	1.83	0.0	-10.3	-10.5	871.4	894.3
SNIT 2	$\sigma_{p0} = 987.0$ MPa								
LIN. LANGTID	0.0	0.0	-45.3	1.66	-0.5	-9.0	-9.2	865.3	882.5
LIN. KORTTID	0.0	0.0	-45.3	1.66	-0.5	-9.0	-9.2	865.3	882.5
NONLIN. LANGTID	0.0	0.0	-51.3	1.85	-0.4	-8.6	-8.8	853.6	873.3
NONLIN. KORTTID	0.0	0.0	-51.3	1.85	-0.4	-8.6	-8.8	853.6	873.3
SNIT 3	$\sigma_{p0} = 997.0$ MPa								
LIN. LANGTID	18.1	0.0	-31.8	1.50	-1.6	-7.5	-7.6	869.7	879.7
LIN. KORTTID	14.5	3.6	-37.8	1.65	-1.6	-7.4	-7.4	860.9	873.6
NONLIN. LANGTID	18.1	0.0	-35.1	1.65	-1.5	-7.3	-7.3	859.8	870.9
NONLIN. KORTTID	14.5	3.6	-42.3	1.81	-1.5	-7.0	-7.0	848.5	863.0
SNIT 4	$\sigma_{p0} = 1006.0$ MPa								
LIN. LANGTID	28.1	0.0	-26.7	1.48	-2.0	-7.0	-7.0	877.3	884.2
LIN. KORTTID	22.5	5.6	-35.3	1.69	-2.1	-6.8	-6.7	861.8	872.8
NONLIN. LANGTID	28.1	0.0	-29.1	1.60	-2.0	-6.8	-6.7	868.2	875.9
NONLIN. KORTTID	22.5	5.6	-39.2	1.84	-2.0	-6.3	-6.3	849.2	861.6
SNIT 5	$\sigma_{p0} = 1012.0$ MPa								
LIN. LANGTID	31.9	0.0	-25.2	1.48	-2.1	-6.9	-6.8	882.1	888.1
LIN. KORTTID	25.5	6.4	-34.6	1.71	-2.2	-6.6	-6.5	863.9	874.3
NONLIN. LANGTID	31.9	0.0	-27.3	1.60	-2.2	-6.7	-6.6	873.3	879.9
NONLIN. KORTTID	25.5	6.4	-38.3	1.86	-2.2	-6.1	-6.0	851.1	862.9

Snit nr.	Hældningsvinkel i grader
0.	1.55
1.	1.80
2.	2.07
3.	2.66
4.	3.15
5.	3.35

Denne drejning kan også spores i betonspændingerne σ_{c2} og σ_{c3} i kassebundens hjørner, idet σ_{c2} nærmer sig σ_{c3} og endog overstiger σ_{c3} , når man betragter snittene i rækkefølgen 0 til 5.

Nulliniedrejningen skyldes momentvektorens afvigelse fra tværsnittets hovedakser sammenholdt med den numeriske reduktion fra snit 0 til 5 af det negative totalmoment, hvor totalmomentet skal forstås som summen af det ydre moment og forspændingsmomentet. Reduktionen af totalmomentet bevirker, at nullinien nærmer sig til den ene af tværsnittets hovedakser. Sammenholdes σ_{c1} , som angiver betonspændingen i brobanepladens knæpunkt, med σ_{c2} og σ_{c3} , ser man, at de største betontrykspændinger for samtlige tværsnit optræder ved underkanten, hvilket betyder, at der ikke optræder positive totalmomenter. Havde der gjort det, ville hældningsvinklen være sprunget 180° .

σ_{c1} er ikke angivet i snit 0, idet betonen på dette sted er revnet. Revnen har dog kun ringe udstrækning, idet den kun ved beregningstypen, ikke-lineær og langtid, har nået det yderligst liggende kabel. Dette ses, at skema 5.2, hvor for snit 0. $\sigma_{p15} = 959.1$ MPa er større end den neutraliserede forspænding i snittet $\sigma_{p0} = 954.0$ MPa. Idet kabel no. 15 sammen med kabel no. 1 jævnfør figur 5.7 er de yderligst placerede kabler, fremgår det af skema 5.2, at ingen kabler i noget snit på nær det nævnte tilfælde befinder sig i revnede zoner.

Skema 5.2 angiver kun nogle få af de data, som man får beregnet. Af andre data kan nævnes: revneliniens placering, tøjninger og spændinger for det effektive betontværsnits hjørnepunkter, tøjninger og spændinger i samtlige slappe og forspændte armerings-

stænger eller kabler, det elastiske tyngdepunkts placering, tøjningen i dette punkt, samt tøjningen i koordinatsystemets begyndelsespunkt, areal og inertimomenter, samt centrifugalmoment vægtet med henholdsvis sekant og tangentmodulerne, idet disse fysiske og geometriske størrelser for ikke-lineære materialer ikke kan skilles ad.

6. KONKLUSION

De omtalte spændingstøjningsrelationer for henholdsvis langtidsbelastning og korttidsbelastning, samt de foreslåede relationer for kombineret langtids-korttidsbelastning åbner i forbindelse med den benyttede beregningsmetode mulighed for mere nøjagtige beregninger af alle typer af polygonale betontværsnit med eller uden udsparinger. Eksempler på sådanne beregninger er foretaget ved brug af det udviklede EDB-program, som syntetiserer rapportens indhold.

Ved anvendelse af programmet kan man tage hensyn til betonens revnedannelse og trækstyrke, samt vælge mellem en lineærelastisk, en lineærelastisk-idealplastisk og en krumliniet elastisk-plastisk arbejdskurve for henholdsvis beton, slap armering og spændarmering. Man har derfor mulighed for at behandle langtidsbelastning og korttidsbelastning, samt kombineret langtids-korttidsbelastning, hvor der for betonens kombinerede langtids-korttids spændingstøjningsrelationer er foreslået udtryk med trykstyrken som en funktion af langtidsspændingsniveauet. Sådanne beregninger synes ikke tidligere foretaget i så generel en form, som der her er tale om.

Programmet er velegnet til simulation af bøjningsforsøg, idet det samme tværsnit kan beregnes for mange lasttilfælde. Modsat kan belastningen holdes konstant, medens betontværsnittets dimensioner, den slappe og forspændte armerings placering og den neutraliserede forspænding varieres kontinuert. Sidstnævnte fremgangsmåde kan tænkes anvendt i forbindelse med dimensioneringsopgaver af komplicerede tværsnit. Varieres både belastningen og tværsnitsbeskrivelsen, kan man beregne spændings- og tøjningstilstanden, samt de belastningsafhængige tværsnitskonstanter langs en given bjælke, hvilket kan være hensigtsmæssigt ved beregningskontrol eller mere nøjagtige deformationsberegninger. I forbindelse med kipstabilitetsberegninger er det netop den generelle beregning af tværsnitskonstanterne langs bjælkeaksen, som har interesse, og denne beregning har derfor været et af hovedformålene med rapporten.

LITTERATURFORTEGNELSE

- [Ramberg.43-1] Ramberg,W., and Osgood,W.R.: Description of Stress-Strain Curves by Three Parameters, N.A.C.A. TN 902, 1943.
- [Nadai.50-1] Nadai,A.: Theory of Flow and Fracture of Solids, 2nd.ed. New York, McGraw-Hill, 1950.
- [Hognestad.51-1] Hognestad,E.: A Study of Combined Bending and Axial Load in Reinforced Concrete Members. Bulletin No.399. Eng.Exp.Station, University of Illinois, 1951.
- [Rüsch.60-1] Rüsch,H.: Researches Toward a General Flexural Theory for Structural Concrete, ACI-Journal, Proceedings Vol.57.No.1. pp.1-28, 1960.
- [Glucklich.61-1] Glucklich,J. and Ishai,O.: Rheological behaviour of hardened cement paste under low stresses, ACI-Journal Feb.1961.
- [Rüsch.62-1] Rüsch,H. Grasser,E. and Rao,P.S.: Principes de Calcul du Béton Armé sous des Etats de Contraintes Monoaxiaux, Bulletin d'Information No.36,Comité Européen du Béton,pp.1-112, 1962.
- [CEB.63-1] Recommandations Pratiques du Comité Européen du Béton, Bulletin d'Information No.39, 1963.
- [Illston.65-1] Illston,J.M.: The components of strain in concrete under sustained compressive stress. Magazine of Concrete Research,March 1965.
- [Newman.68-1] Newman,K.: Criteria for the Behaviour of Plain Concrete under Complex States of Stress. The Structures of Concrete, Cement and Concrete Association,pp.255-274,London, 1968.
- [CEB.70-1] CEB-FIP International Recommendations for the Design and Construction of Concrete Structures,1, Principles and Recommendations, 1970.

- [Neville.70-2] Neville,A.M.: Creep of concrete: plain, reinforced and prestressed. Amsterdam, 1970.
- [Popovics.70-3] Popovics,S.: Review of Stress-Strain Relationships for Concrete. ACI-Journal, Proceedings,Vol.67,No.3, pp.243-248, 1970.
- [Sargin.71-1] Sargin,M.: Stress-Strain Relationships for Concrete and the Analysis of Structural Concrete Sections. Study No.4,Solid Mechanics Division, University of Waterloo, Canada, 1971.
- [CEB.72-1] Chiorino,M.A.: Structural Effects of Time Dependent Behaviour of Concrete. CEB-FIP Manual No.80, 1972.
- [Jacobi.72-2] Jacobi,S.L.S.,Kowalek,J.S. and Pizzo,J.T.: Iterative methods for nonlinear optimization problems. Prentice Hall,Englewood Cliffs,New Jersey, 1972.
- [Aas-Jakobsen.73-1] Aas-Jakobsen,K.: A Design Method for Slender Reinforced Concrete Frames. ETH,Zürich, 1973.
- [CEB.73-2] Effects Structuraux du Fluage et des Déformations Différées du Béton. CEB-Bulletin d'Informations No.94, 1973.
- [Brøndum-Nielsen.73-3] Brøndum-Nielsen,T.: Structural Concrete Lyngby, 1973.
- [Rüsch.73-4] Rüsch,H.,Jungwirth,D. und Hilsdorf,H.: Kritische Sichtung der Verfahren zur Berücksichtigung der Einflüsse von Kriechen und Schwinden des Betons auf das Verhalten der Tragwerke. Beton- und Stahlbetonbau,Heft 3,4 und 6, 1973.
- [CS.74-1] Concrete Society Technical Paper No.101, The Creep of Structural Concrete, London, 1974.
- [Illston.74-2] Illston,J.M. and Constantinescu,D.R.: Direct methods of analysing the structural effects of linear creep of ageing concrete. Matériaux et Constructions.Vol.7.No.42, 1974.

- [Nielsen.74-3] Fuglsang Nielsen, L.: Constitutive Equations for Concrete.
Bygningssstatiske Meddelelser, Nr. 3,
København, 1974.
- [Davis.75-1] Davis, P.J. and Rabinowitz, F.: Methods
of Numerical Integration.
Academic Press, 1975.
- [Lyngberg.76-1] Lyngberg, B.S.: Ultimate shear resistance
of partially prestressed reinforced concrete I-beams.
ACI-Journal No. 4. Vol. 73, April 1976.
- [Rüsch.76-2] Rüsch, H. und Jungwirth, D.: Berücksichtigung
der Einflüsse von Kriechen und Schwinden
auf das Verhalten der Tragwerke. Band 2.
1976.
- [Lyngberg.77-1] Lyngberg, B.S.: An experimental study of
the effect of prestress upon the shear
strength of post-tensioned partially
prestressed concrete I-beams with web
reinforcement.
København, 1977.
- [CEB.78-1] CEB/FIP Model Code for Concrete Structures,
Paris, 1978.

APPENDIX A

Ligevægtsligningernes Jacobi-matrix

I dette appendix angives den fuldt udskrevne Jacobi-matrix $\underline{J}_F(\underline{u})$ svarende til ligevægtsligningerne (2.5)-(2.7), som i en mere kompakt form er angivet ved (2.8):

$$\underline{F}(\underline{u}) = \underline{0} , \quad (2.8)$$

hvor $\underline{u} = (\epsilon_z, \kappa_x, \kappa_y)$.

Jacobi-matricen kan opfattes som systemets stivhedsmatrix ved små deformationsændringer ud fra en given deformationstilstand, hvilket vil sige systemets tangentstivhedsmatrix, der er en symmetrisk matrix.

$$\underline{J}_F(\underline{u}) = \frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{u}} = \frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{u}_r} = \begin{bmatrix} \int E_t dA & \int E_t y dA & -\int E_t x dA \\ \int E_t y dA & \int E_t y^2 dA & -\int E_t xy dA \\ -\int E_t x dA & -\int E_t xy dA & \int E_t x^2 dA \end{bmatrix} \quad (A.1)$$

Nedenstående er elementerne i (A.1) angivet fuldt udskrevne.

De anvendte indices har følgende betydning:

c : Beton.

s : Slap armering.

p : Forspændt armering.

t : Den benyttede E-modul er tangentmodulen $E(\epsilon)_t$.

i : Summation over antal slappe armeringsstænger.

j : Summation over antal forspændte armeringsstænger eller kabler.

Kun i og j er summationsindices.

$$\int_A E_t dA = \frac{\partial F_1}{\partial u_1} = \frac{\partial F_1}{\partial \epsilon_z} = \int_{A_c} E_c(\epsilon_c)_t dA_c + \sum_i (E_s(\epsilon_{si})_t A_{si}) + \sum_j (E_p(\epsilon_{pj})_t A_{pj}) \quad (A.2)$$

$$\begin{aligned} \int_A y E_t dA &= \frac{\partial F_1}{\partial u_2} = \frac{\partial F_1}{\partial \kappa_x} = \frac{\partial F_2}{\partial u_1} = \frac{\partial F_2}{\partial \epsilon_z} \\ &= \int_{A_c} y E_c(\epsilon_c)_t dA_c + \sum_i (y_i E_s(\epsilon_{si})_t A_{si}) \\ &\quad + \sum_j (y_j E_p(\epsilon_{pj})_t A_{pj}) \end{aligned} \quad (A.3)$$

$$\begin{aligned} - \int_A x E_t dA &= \frac{\partial F_1}{\partial u_3} = \frac{\partial F_1}{\partial \kappa_y} = \frac{\partial F_3}{\partial u_1} = \frac{\partial F_3}{\partial \epsilon_z} \\ &= - \int_{A_c} x E_c(\epsilon_c)_t dA_c - \sum_i (x_i E_s(\epsilon_{si})_t A_{si}) \\ &\quad - \sum_j (x_j E_p(\epsilon_{pj})_t A_{pj}) \end{aligned} \quad (A.4)$$

$$\begin{aligned} \int_A y^2 E_t dA &= \frac{\partial F_2}{\partial u_2} = \frac{\partial F_2}{\partial \kappa_x} \\ &= \int_{A_c} y^2 E_c(\epsilon_c)_t dA_c + \sum_i (y_i^2 E_s(\epsilon_{si})_t A_{si}) \\ &\quad + \sum_j (y_j^2 E_p(\epsilon_{pj})_t A_{pj}) \end{aligned} \quad (A.5)$$

$$- \int_A xy E_t dA = \frac{\partial F_2}{\partial u_3} = \frac{\partial F_2}{\partial \kappa_y} = \frac{\partial F_3}{\partial u_2} = \frac{\partial F_3}{\partial \kappa_x}$$

$$\begin{aligned}
 &= - \int_{A_c} xy E_c(\epsilon_c) t_{dc} - \sum_i (x_i y_i E_s(\epsilon_{si}) t_{si}^A) \\
 &\quad - \sum_j (x_j y_j E_p(\epsilon_{pj}) t_{pj}^A) \quad (A.6)
 \end{aligned}$$

$$\int_A x^2 E_t dA = \frac{\partial F_3}{\partial u_3} = \frac{\partial F_3}{\partial \kappa_y}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{A_c} x^2 E_c(\epsilon_c) t_{dc} + \sum_i (x_i^2 E_s(\epsilon_{si}) t_{si}^A) \\
 &\quad + \sum_j (x_j^2 E_p(\epsilon_{pj}) t_{pj}^A) \quad (A.7)
 \end{aligned}$$

APPENDIX B

Ligningssystemet (2.19):

$$\begin{bmatrix} \int E_t dA & \int y E_t dA & -\int x E_t dA \\ \int y E_t dA & \int y^2 E_t dA & -\int xy E_t dA \\ -\int x E_t dA & -\int xy E_t dA & \int x^2 E_t dA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \epsilon_z \\ \Delta \kappa_x \\ \Delta \kappa_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\int \sigma dA + N \\ -\int y \sigma dA + M_x \\ \int x \sigma dA + M_y \end{bmatrix}$$

Efter udførelse af den ved formel (2.22) angivne koordinattransformation kan fladeintegralerne i (2.19) omformes til sædvanlige integraler, idet man benytter følgende integraler i N-retningen:

$$\int_{n_1(k)}^{n_2(k)} dn = n_2(k) - n_1(k) = b(k), \quad (B.1)$$

hvor $b(k)$ som funktion af k angiver bredden i N-retningen af det betragtede område. Se figur B.1.

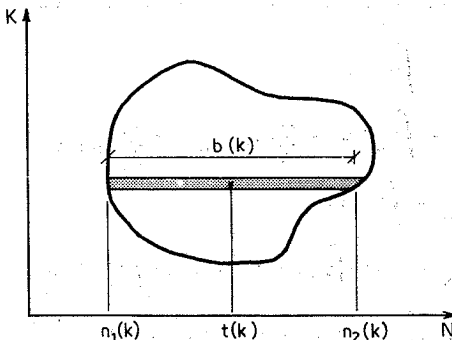


Fig. B.1: Bredde $b(k)$ og tyngdepunkt $t(k)$ for en infinitesimal strimmel parallel med N-aksen.

$$\begin{aligned}
 \int_{n_1(s)}^{n_2(s)} n \, dn &= \frac{1}{2}((n_2(k))^2 - (n_1(k))^2) \\
 &= \frac{1}{2}(n_2(k) + n_1(k))(n_2(k) - n_1(k)) \\
 &= t(k) \cdot b(k) ,
 \end{aligned} \tag{B.2}$$

hvor

$$t(k) = \frac{1}{2}(n_2(k) + n_1(k)) \tag{B.3}$$

som funktion af k angiver det geometriske tyngdepunkt i N-retningen af det betragtede område. Se figur B.1.

$$\int_{n_1(s)}^{n_2(s)} n^2 \, dn = \frac{1}{3}((n_2(k))^3 - (n_1(k))^3) = r(k) , \tag{B.4}$$

hvor $r(k)$ angiver områdets inertimoment om K-aksen.

Ved anvendelse af (B.1)-(B.4) kan elementerne i (2.19) nu opskrives som sædvanlige integraler i K-koodinaten.

$$\begin{aligned}
 -F_1 &= N - \int \sigma \, dA \\
 &= N - \int \sigma_c b \, dk - \sum_i (\sigma_{si} A_{si}) - \sum_j (\sigma_{pj} A_{pj})
 \end{aligned} \tag{B.5}$$

$$\begin{aligned}
 -F_2 &= M_x - \int y \sigma \, dA \\
 &= M_x - \cos\theta \int \sigma_c b k \, dk - \sin\theta \int \sigma_c b t \, dk \\
 &\quad - \sum_i ((k_i \cos\theta + n_i \sin\theta) \sigma_{si} A_{si}) \\
 &\quad - \sum_j ((k_j \cos\theta + n_j \sin\theta) \sigma_{pj} A_{pj})
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

$$\begin{aligned}
 F_3 &= M_y + \int x \sigma \, dA \\
 &= M_y + \cos\theta \int \sigma_c \, b \, t \, dk - \sin\theta \int \sigma_c \, b \, k \, dk \\
 &\quad + \sum_i ((n_i \cos\theta - k_i \sin\theta) \sigma_{si} A_{si}) \\
 &\quad + \sum_j ((n_j \cos\theta - k_j \sin\theta) \sigma_{pj} A_{pj}) \quad (B.7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int E_t \, dA &= \int E_{tc} \, b \, dk \\
 &\quad + \sum_i (E_{tsi} A_{si}) + \sum_j (E_{tpj} A_{pj}) \quad (B.8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int y E_t \, dA &= \cos\theta \int E_{tc} \, b \, k \, dk + \sin\theta \int_{tc} b \, t \, dk \\
 &\quad + \sum_i ((k_i \cos\theta + n_i \sin\theta) E_{tsi} A_{si}) \\
 &\quad + \sum_j ((k_j \cos\theta + n_j \sin\theta) E_{tpj} A_{pj}) \quad (B.9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\int x E_t \, dA &= -\cos\theta \int E_{tc} \, b \, t \, dk + \sin\theta \int E_{tc} \, b \, k \, dk \\
 &\quad - \sum_i ((n_i \cos\theta - k_i \sin\theta) E_{tsi} A_{si}) \\
 &\quad - \sum_j ((n_j \cos\theta - k_j \sin\theta) E_{tpj} A_{pj}) \quad (B.10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int y^2 E_t \, dA &= \cos^2\theta \int E_{tc} \, b \, k^2 \, dk + \sin^2\theta \int E_{tc} \, r \, dk \\
 &\quad + 2\cos\theta \sin\theta \int E_{tc} \, b \, t \, k \, dk \\
 &\quad + \sum_i ((k_i^2 \cos^2\theta + n_i^2 \sin^2\theta + 2n_i k_i \cos\theta \sin\theta) E_{tsi} A_{si}) \\
 &\quad + \sum_j ((k_j^2 \cos^2\theta + n_j^2 \sin^2\theta + 2n_j k_j \cos\theta \sin\theta) E_{tpj} A_{pj}) \quad (B.11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\int xy E_t \, dA &= -\cos^2\theta \int E_{tc} \, b \, t \, k \, dk + \sin^2\theta \int E_{tc} \, b \, t \, k \, dk \\
 &\quad + \cos\theta \sin\theta \int E_{tc} (b \, k^2 - r) \, dk
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_i ((n_i k_i \cos^2 \theta - n_i k_i \sin^2 \theta) \\
 & + (n_i^2 - k_i^2) \cos \theta \sin \theta) E_{tsi} A_{si}) \\
 & - \sum_j ((n_j k_j \cos^2 \theta - n_j k_j \sin^2 \theta) \\
 & + (n_j^2 - k_j^2) \cos \theta \sin \theta) E_{tpj} A_{pj}) \quad (B.12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int x^2 E_t dA &= \cos^2 \theta \int E_{tc} r dk + \sin^2 \theta \int E_{tc} b k^2 dk \\
 &- 2 \cos \theta \sin \theta \int E_{tc} b t dk \\
 &+ \sum_i ((n_i^2 \cos^2 \theta + k_i^2 \sin^2 \theta - 2 n_i k_i \cos \theta \sin \theta) E_{tsi} A_{si}) \\
 &+ \sum_j ((n_j^2 \cos^2 \theta + k_j^2 \sin^2 \theta - 2 n_j k_j \cos \theta \sin \theta) E_{tpj} A_{pj}) \quad (B.13)
 \end{aligned}$$

APPENDIX C

Symbolerne i dette appendix er i overensstemmelse med symbolerne i [Brøndum-Nielsen.73-3] og er ikke medtaget i symbollisten.

Løsning til beregningseksempel 4.2.1 efter principperne i [Brøndum-Nielsen.73-3]:

Afstand fra overkant til den totale aksialarmerings tyngdepunkt er

$$d = \frac{0,00147 \cdot 0,70 + 0,0005 \cdot 0,65}{0,00147 + 0,00050} = \frac{0,001354}{0,00197} = 0,687 \text{ m}$$

Moment om dette punkt inklusive bidrag fra forspænding:

$$M = 0,5000 + 0,4(0,687 - 0,650) = 0,5148 \text{ MNm}$$

Den relative forspænding er i henhold til SC^x), lign. (17.22):

$$x = \frac{2 \cdot 0,4 \cdot 0,687}{3 \cdot 0,5148} = 0,356$$

SC, lign. (17.26) og (17.24):

$$\sum \alpha \rho = 20 \frac{0,00197}{0,3 \cdot 0,687} = 0,191$$

SC, Appendiks 1 - 3:

$$\beta = 0,551$$

$$\mu_c = 0,225$$

$$\mu_s = 0,276$$

SC, lign. (17.23):

$$x = 0,551 \cdot 0,687 = 0,379 \text{ m}$$

^{x)} SC refererer til: [Brøndum-Nielsen.73-3]

SC, lign. (17.27):

$$\sigma_c = \frac{0,5148}{0,225 \cdot 0,3 \cdot 0,687^2} = \underline{\underline{16,2 \text{ MPa}}}$$

SC, lign. (17.30):

$$\Delta\sigma_s = \frac{0,5148 \cdot 20}{0,276 \cdot 0,3 \cdot 0,687^2} = 263 \text{ MPa}$$

Spænding i Tentor-armeringen:

$$\sigma_s = 263 \frac{0,700 - 0,379}{0,687 - 0,379} = 263 \frac{0,321}{0,308} = \underline{\underline{274 \text{ MPa}}}$$

Spænding i spændarmeringen:

$$\sigma_p = \frac{0,4}{0,0005} + 263 \frac{0,650 - 0,379}{0,308} = \underline{\underline{1031 \text{ MPa}}}$$

Løsning til beregningseksempel 4.3.4 efter principperne i
[Brøndum-Nielsen.24-73]:

1 : Korttidslast:

I henhold til løsning til eksempel 4.2.1:

$$\Delta\sigma_p = 1031 - \frac{0,4}{0,0005} = 231 \text{ MPa}$$

SC, lign. (17.37):

$$N_2 = (1 - \frac{7}{20})(0,00147 \cdot 274 + 0,0005 \cdot 231) = 0,262 + 0,075 = 0,337 \text{ MN}$$

N_2 's afstand fra tværsnittets overkant:

$$a = \frac{0,262 \cdot 0,70 + 0,075 \cdot 0,65}{0,337} = 0,689 \text{ m}$$

$$M = 0,6148 - 0,337(0,689 - 0,687) = 0,6141 \text{ MNm}$$

$$P_n = 0,400 + 0,337 = 0,737 \text{ MN}$$

$$\Sigma\alpha\rho = \frac{0,191 \cdot 7}{20} = 0,067$$

SC, ligning (17.22):

$$\chi = \frac{2 \cdot 0,737 \cdot 0,687}{3 \cdot 0,6141} = 0,550$$

SC, appendix No. 2:

$$\mu_c = 0,201$$

SC, ligning (17.27):

$$\sigma_c = \frac{0,6141}{0,201 \cdot 0,3 \cdot 0,687^2} = \underline{\underline{21,6 \text{ MPa}}}$$

2 : Langtidslast:

I henhold til løsning til eksempel 4.2.1:

$$M = 0,5148 + 0,1000 = 0,6148 \text{ MN}$$

$$\Sigma a\rho = 0,191$$

SC, ligning (17.22):

$$\chi = \frac{2 \cdot 0,4 \cdot 0,687}{3 \cdot 0,6148} = 0,298$$

SC, appendix No. 2:

$$\mu_c = 0,219$$

SC, ligning (17.27):

$$\sigma_c = \frac{0,6148}{0,219 \cdot 0,3 \cdot 0,687^2} = \underline{\underline{19,8 \text{ MPa}}}$$

APPENDIX D

Dataudskrift for tværsnitsberegninger

*** EXAMPLE 5.1 GENERAL LOADCASE NONLINEAR ***

THIS PROGRAM CALCULATES THE NORMAL STRESSES AND NORMAL STRAINS,
THE RADII OF CURVATURE AND THE CROSS-SECTIONAL RIGIDITIES
IN A SPECIFIED NUMBER OF CONCRETE BEAM SECTIONS
REINFORCED WITH NON-PRESTRESSED AND/OR PRESTRESSED STEELBARS.

PROBLEM INPUT.

BEAM LENGTH IN METERS OR NUMBER OF INVESTIGATED SECTIONS : 1.000

DESCRIPTION OF CROSS-SECTION:

COORDINATES FOR SECTION CORNERS AND STEEL-BAR CHARACTERISTICS:

CROSS-SECTIONS WITH CHANGES IN GEOMETRY:
UNCHANGED FOR ALL SECTIONS

Z	X	Y
M	M	M
0.000E+00	1.500E-01	0.000E+00
	1.500E-01	7.500E-01
	-1.500E-01	7.500E-01
	-1.500E-01	0.000E+00

CROSS-SECTIONS WITH CHANGES IN THE NON-PRESTRESSING STEEL-BAR ARRANGEMENT:

*** EXAMPLE 5.1 GENERAL LOADCASE NONLINEAR ***

UNCHANGED FOR ALL SECTIONS

Z	X	Y	AREA
M	M	M	MM2
0.000E+00	1.000E-01	7.000E-01	4.910E-04
	0.200E+00	7.000E-01	4.910E-04
	-1.000E-01	7.000E-01	4.910E-04

CROSS-SECTIONS WITH CHANGES IN THE PRESTRESSING STEEL-BAR ARRANGEMENT:

UNCHANGED FOR ALL SECTIONS

Z	X	Y	AREA	NEUTR. PRESTR.
M	M	M	MM2	MPA
0.000E+00	0.000E+00	6.500E-01	5.000E-04	8.000E+02

MATERIAL DESCRIPTION.

CONCRETE:

STRESS-STRAIN RELATIONS.

LOADING: ELASTIC-PLASTIC HARDENING.

UNLOADING: LINEAR ELASTIC.

LONG-TIME LOADING.

INITIAL MODULUS OF ELASTICITY : 1.050E+04 MPA
COMPRESSION STRENGTH : -2.500E+01 MPA
TENSILE STRENGTH : 2.500E+00 MPA
ULTIMATE COMPRESSION STRAIN : -3.500E-03

*** EXAMPLE 5.1 GENERAL LOADCASE NONLINEAR ***

INTERSECTION WITH STRAIN-AXIS OF EXTRAPOLATED STRESS-CURVE : -1.429E-02

SHORT-TIME LOADING.

INITIAL MODULUS OF ELASTICITY : 3.000E+04 MPA
COMPRESSION STRENGTH : -3.150E+01 MPA
TENSILE STRENGTH : 2.500E+00 MPA
ULTIMATE COMPRESSION STRAIN : -3.500E-03
INTERSECTION WITH STRAIN-AXIS OF EXTRAPOLATED STRESS-CURVE : -6.300E-03

NON-PRESTRESSED STEEL:

STRESS-STRAIN RELATIONS.

LOADING: LINEAR ELASTIC, ELASTIC-PLASTIC HARDENING.

UNLOADING: LINEAR ELASTIC.

INITIAL MODULUS OF ELASTICITY : 2.100E+05 MPA
ELASTIC LIMIT : 4.220E+02 MPA
0.2% YIELD-STRESS : 6.230E+02 MPA
1.0% YIELD-STRESS : 6.580E+02 MPA

PRESTRESSED STEEL:

STRESS-STRAIN RELATIONS.

LOADING: LINEAR ELASTIC, ELASTIC-PLASTIC HARDENING.

UNLOADING: LINEAR ELASTIC.

INITIAL MODULUS OF ELASTICITY : 2.040E+05 MPA
ELASTIC LIMIT : 1.413E+03 MPA
0.2% YIELD-STRESS : 1.660E+03 MPA

*** EXAMPLE 5.1 GENERAL LOADCASE NONLINEAR ***

1.0% YIELD-STRESS : 1.659E+03 MPA

*** EXAMPLE 5.1 GENERAL LCADCASE NONLINEAR ***

LOADINGS.

THE DEFINITION OF THE FORCES CAUSES THE RESULTING
NORMAL FORCES N (TENSION POSITIVE) TO ACT THROUGH
THE ORIGIN OF THE CHOSEN COORDINATE-SYSTEM.

SECTION (M)	LONG-TIME LOADINGS			ADDITIONAL SHORT-TIME LOADINGS		
	N (MN)	M_Y (MNM)	M_X (MNM)	N (MN)	M_Y (MNM)	M_X (MNM)
1.000	-1.000E-C2	-1.000E-C2	5.000E-01	-1.000E-02	-1.000E-02	1.000E-01

*** EXAMPLE 5.1 GENERAL LCADCASE NONLINEAR ***

POSITION IN METERS FROM LEFT BEAM END OR IDENTIFICATION OF CROSS-SECTION : 1.000

	X M	Y M	STRAIN -	STRESS MPA
EFF. CROSS-SECTION:				
LONG-TIME EFF. SECTION:				
	1.500E-01	0.000E+00	-1.587E-03	-1.389E+01
	1.500E-01	4.159E-C1	2.359E-04	2.519E+00
	-1.500E-01	4.862E-01	2.357E-04	2.510E+00
	-1.500E-01	0.000E+00	-1.587E-03	-1.594E+01
NON-PRESTRESSED STEEL:				
	1.000E-01	7.000E-01	1.436E-03	3.016E+C2
	0.000E+00	7.000E-01	1.334E-03	2.800E+02
	-1.000E-01	7.000E-01	1.231E-03	2.584E+C2
PRESTRESSED STEEL:				
	0.000E+00	6.500E-01	5.035E-03	1.027E+03

*** EXAMPLE 5.1 GENERAL LCADCASE NONLINEAR ***

POSITION IN METERS FROM LEFT BEAM END OR IDENTIFICATION OF CROSS-SECTION : 1.000

	X M	Y M	STRAIN -	STRESS MPA
EFF. CROSS-SECTION:				
SHORT-TIME EFF. SECTION:				
	1.500E-01	0.000E+00	-1.749E-03	-1.654E+C1
	1.500E-01	3.237E-01	-2.483E-06	2.504E+00
	-1.500E-01	4.380E-01	1.003E-04	2.462E+00
	-1.500E-01	0.000E+00	-2.223E-03	-2.122E+01
NON-PRESTRESSED STEEL:				
	1.000E-01	7.000E-01	1.259E-03	3.969E+C2
	0.000E+00	7.000E-01	1.739E-03	3.651E+02
	-1.000E-01	7.000E-01	1.578E-03	3.314E+02
PRESTRESSED STEEL:				
	0.000E+00	6.500E-01	5.394E-03	1.100E+03

ELASTIC CENTER COORDINATES AND STRAIN CHARACTERISTICS

SECTION	ELASTIC CENTER COORDINATES		STRAIN AT (X_T,Y_T)	STRAIN AT (X=0,Y=0)	RADIO CF CURVATURE	
Z (M)	X_T (M)	Y_T (M)	EPS_T	EPS_0	KAPPA_X	KAPPA_Y
1.000	-2.710E-02	3.151E-01	-3.565E-04	-1.991E-03	5.327E-03	-1.612E-03

SECANT AND TANGENT SECTION RIGIDITIES.

SECTION (M)	(EI)_SEC_Y (MN*KVM)	(EI)_SEC_X (MN*KVM)	(EI)_SEC_XY (MN*KVM)	(EI)_TAN_Y (MN*KVM)	(EI)_TAN_X (MN*KVM)	(EI)_TAN_XY (MN*KVM)
1.000	6.257E+00	9.881E+01	-4.654E-01	2.000E+01	4.248E+01	1.922E+01

AFDELINGEN FOR BÆRENDE KONSTRUKTIONER

DANMARKS TEKNISKE HØJSKOLE

Structural Research Laboratory

Technical University of Denmark, DK-2800 Lyngby

RAPPORTER (Reports)

(1977 -)

- R 81. Resumeoversigt 1976. Summaries of papers 1976. 1977.
- R 82. MØLLMANN, H.: Static and dynamic analysis of plane cable structures. 1977.
- R 83. RIBERHOLT, H.: Bolte indlimet i limtræ. 1977.
- R 84. AGERSKOV, H. and J. BJØRNBÆK-HANSEN: Fatigue strength of welded connections in round bar steel structures. 1977.
- R 85. LAURSEN, M.E., M.P. NIELSEN and M. ROIKJÆR: Stability analysis of beams and arches by energy methods. 1977.
- R 86. LAURSEN, M.E.: Derivation of symmetric integration formulas for triangles. 1977.
- R 87. LAURSEN, M.E.: Stability and vibration analysis of plane curved beams by an equilibrium finite element method. 1977.
- R 88. PEDERSEN, FLEMMING BLIGAARD: Vibration analysis of viscoelastically damped sandwich structures. 1978.
- R 89. BRØNDUM-NIELSEN, TROELS: Epoxy resin repair of cracked concrete beams. 1978. *)
- R 90. HESS, UWE, B.CHR. JENSEN, M.W. BRÆSTRUP, M.P. NIELSEN og FINN BACH: Gennemlokning af jernbetonplader. 1978.
- R 91. HANSEN, KARL ERIK, KAJ L. BRYDER og M.P. NIELSEN: Armeringsbestemmelse i jernbetonskaller. 1978.
- R 92. ASKEGAARD, V.: Stress and strain measurements in solid materials. 1978.
- R 93. SCHMIDT, HENRIK: Udbredelse af akustisk emission i beton. 1978.
- R 94. BYSKOV, ESBEN og STEEN KRENK: Konstruktionstræs mekaniske styrke. 1978.
- R 95. Resumeoversigt 1977. Summaries of papers 1977. 1978.
- R 96. DYRBYE, CLÆS: Admittance-curves. ZILSTORFF, ANNE and CLÆS DYRBYE: Admittance of bars. 1978.
- R 97. DYRBYE, CLÆS: Dynamic systems with sinusoidal mode shapes. 1978.
- R 98. ANDRESEN, CLÆS: Bjælker og søjler med åbne, tyndvæggede tværsnit. 1978.
- R 99. RIBERHOLT, H.: Eingeleimte Gewindestangen. 1978.
- R 100. PEDERSEN, C.: Opbøjjet længdearmering som forskydningsarmering. 1978.
- R 101. JENSEN, J.F., M.W. BRÆSTRUP, F. BACH og M.P. NIELSEN: Nogle plasticitetsteoretiske bjækeløsninger. 1978.
- R 102. JENSEN, J.F., C. PEDERSEN, M.W. BRÆSTRUP, F. BACH og M.P. NIELSEN: Rapport over forskydningsforsøg med 6 spåndbetonbjælker. 1978.
- R 103. JENSEN, J.F., V. JENSEN, H.H. CHRISTENSEN, F. BACH, M.W. BRÆSTRUP and M.P. NIELSEN: On the behaviour of cracked reinforced concrete beams in the elastic range. 1978.

*) Udsolgt. Out of print.

- R 104. ANDERSEN, ERIK YDING: Konstruktionsovervågning med akustisk emission. Prøvebelastning af landevejsbro. 1979.
- R 105. FREDSCGAARD, SØREN SKYTTE: Ligevægtsselementer i de finite elementers metode. Formulering og beregningsgang. 1979.
- R 106. AGERSKOV, HENNING: Tests on high-strength bolted T-stub connections. 1979.
- R 107. KIRK, JENS: Direkte beregning af imperfekte skalkonstruktioner. 1979.
- R 108. Resumeoversigt 1978. Summaries of papers 1978. 1979.
- R 109. BRØNDUM-NIELSEN, TROELS: Stress analysis of concrete sections under service load. 1979.
- R 110. BRÆSTRUP, M.W.: Effect of main steel strength on the shear capacity of reinforced concrete beams with stirrups. 1979.
- R 111. BRINCKER, RUNE: Murede vægges tværbæreevne. En undersøgelse af murværks fysiske egenskaber. 1979.
- R 112. GIMSING, NIELS J.: Analytisk undersøgelse af materialforbruget for plane kabelsystemer med ensformig fordelt belastning. 1979.
- R 113. MADSEN, HENRIK OVERGAARD: Load models and load combinations. 1979.
- R 114. RIBERHOLT, H. and P. HAUGE MADSEN: Strength distribution of timber structures. Measured variation of the cross sectional strength of structural lumber. 1979.
- R 115. PEDERSEN, MAX ELGAARD: En generel beregningsmetode for betontværsnit. 1980.
- R 116. PEDERSEN, MAX ELGAARD: Kipstabilitet af armerede betonbjælker. 1980.
- R 117. BRYDER, KAJ L.: Optimeringsmetoder for 2-dimensionale legemer af ideal-plastisk materiale. 1980.
- R 118. DUKOW, EWTIM N.: Optimale Projektierung von vorgespannten Brückenträgern. 1980.
- R 119. PEDERSEN, HENNING: Optimering af jernbetonplader. 1980.
- R 120. BACH, FINN, M.P. NIELSEN and M.W. BRÆSTRUP: Shear tests on reinforced concrete T-beams. Series V, U, X, B and S. 1980.

Abonnement 1.7.1979 - 1.7.1980 inden for Danmark kr. 40.-.

Subscription rate 1.7.1979 - 1.7.1980 D.Kr. 60.-.

Hvis De ikke allerede modtager Afdelingens resumeoversigt ved udgivelsen, kan Afdelingen tilbyde at tilsende næste års resumeoversigt, når den udgives, dersom De udfylder og returnerer nedenstående kupon.

Returneres til
Afdelingen for Bærende Konstruktioner
Danmarks tekniske Højskole
Bygning 118
2800 Lyngby

Fremtidig tilsendelse af resumeoversigter udbedes af
(bedes udfyldt med blokbogstaver):

Stilling og navn:

Adresse:

Postnr. og -distrikt:

The Department has pleasure in offering to send you a next year's list of summaries, free of charge. If you do not already receive it upon publication, kindly complete and return the coupon below.

To be returned to:
Structural Research Laboratory
Technical University of Denmark
Building 118
DK-2800 Lyngby, Denmark.

The undersigned wishes to receive the Department's
List of Summaries:
(Please complete in block letters)

Title and name

Address.....

Postal No. and district.....

Country.....